TD1 : Température et chaleur

I) Température

I-1) Échelle thermométrique de Fahrenheit (°F)

Cette échelle, toujours utilisée par les anglo-saxons, date de 1720. Elle utilise un repère supplémentaire, la congélation de l'eau saturée de sel.
La correspondance est la suivante

Congélation de l'eau saturée en sel	$\longrightarrow$	0°F
Congélation de l'eau pure	$\longrightarrow$	32°F
Ébullition de l'eau pure	$\longrightarrow$	212°F

II-2) Échelle centigrade de température (°c)

Cette échelle date de 1742. On utilise la correspondance suivante :

Congélation de l'eau pure	$\longrightarrow$	0°c
Ébullition de l'eau pure	$\longrightarrow$	100°c

II-3) Échelle thermodynamique de Celsius (°C)

Cette échelle est basée sur l'observation suivante : tous les thermomètres à gaz fournissent la même échelle lorsque ces gaz sont utilisés à faible pression. Il existe deux sortes de thermomètres à gaz, ceux basés sur la variation de volume à pression constante dont l'échelle est définie par la relation linéaire $v = v_0(1+\alpha t)$ et ceux qui utilisent la variation de pression à volume constant et dont l'échelle est définie par : $p = p_0(1+\beta t)$. Pour tous les gaz, on trouve quelque soit leur nature :

$$\alpha = \beta = 1 / 273{,}15$$

Cette échelle commune à tous les gaz a un caractère universel. Elle est appelée échelle centigrade du gaz parfait ou échelle Celsius.

II-4) Échelle thermodynamique de Kelvin (K)

Cette échelle (notée T) adoptée en 1954 est définie à partir de l'échelle centigrade du gaz parfait par la relation :

$$T = t + 1/\alpha = t + 273{,}15$$

On peut montrer que cette échelle se confond avec l'échelle de température introduite par Lord kelvin mesurée en °K (degré kelvin). La définition rigoureuse de la température absolue se fait à l'aide du deuxième principe de la thermodynamique.

Exercice 1
Trouver a et b tels que : $a.(t_F + 40) = b.(t_c + 40)$ pour la correspondance °C vers °F ?
Quelle est la température de congélation en °C de l'eau saturée de sel ?
Pour quelle température a-t-on la même représentation numérique dans les deux systèmes ?

II) Dilatation des solides

1°) Dilatation linéique

Lorsqu'un solide est soumis à une élévation de température ΔT, son augmentation de longueur ΔL est en première approximation :

$$\Delta L = \alpha . L_0 . \Delta T$$

où α est le coefficient de dilatation linéique, L_0 la longueur initiale à la température T_0.

2°) Dilatation surfacique

$$\Delta S = \gamma . S_0 . \Delta T$$

avec $\gamma = 2\alpha$ pour les matériaux isotropes.

3°) Dilatation volumique

$$\Delta V = \beta . V_0 . \Delta T$$

avec $\beta = 3\alpha$ pour les matériaux isotropes.

Exercice 2

Calculer l'allongement d'une barre de cuivre de 80 cm de long à 15°C quand on la chauffe à 35°C. On donne : $\alpha=1,5.10^{-5}$ °C^{-1} pour le cuivre aux températures considérées.

Exercice 3

On veut introduire un cylindre de 1 cm de diamètre à 30°C dans un trou percé (diamètre 0,9997 cm) dans une plaque d'acier à 30°C. Sachant que le coefficient de dilatation linéique de l'acier est $\alpha=1,1.10^{-5}$ °C^{-1}, à quelle température faut-il chauffer la plaque d'acier ?

Exercice 4

A 20°C, une bille d'acier ($\alpha=1,1.10^{-5}$ °C^{-1}) a un diamètre $\Phi=0,9$ cm. Une plaque en aluminium ($\alpha=2,2.10^{-5}$ °C^{-1}) est percée d'un trou de diamètre $\Phi=0,899$ cm. A quelle température identique doit-on chauffer bille et plaque pour que la bille passe dans la plaque sans jeu ?

III) La chaleur

Nous présenterons la notion de chaleur en cours à travers la formulation des principes de la thermodynamique. Ce qu'il faut retenir de ce principe, c'est que la chaleur est équivalente à de l'énergie et se mesure donc en Joule (J)

III-1) Ancienne unité

La calorie est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à 1g d'eau pour passer sa température de 14,5°C à 15,5°C. Évidemment on peut convertir cette unité en Joule : 1 calorie = 4,1868 Joule.

III-2) Capacité thermique massique ou chaleur massique

On l'appelle parfois aussi **chaleur spécifique** traduction de l'anglais *specific heat.*
On observe pratiquement qu' on a proportionnalité entre l'élévation de température et la chaleur reçue par un corps ce qui s'exprime par :

$$\boxed{Q=m.c.\Delta T}$$

Le coefficient de proportionnalité c ainsi défini est appelé capacité thermique massique.
On rappelle que la notation ΔT désigne toujours $T_{finale} - T_{initiale}$ qui peut être positive ou négative. On rappelle la convention sur la chaleur : elle est considérée comme positive si elle est apportée au corps.

Pour un corps donné, cette capacité thermique massique peut dépendre de la température, elle est alors notée C_T. On exprime alors la relation de proportionnalité plutôt sous forme différentielle :

$\boxed{dQ = m.c_T.dT = C_{th}.dT}$ C_{th} = capacité thermique

En général on simplifie en ne tenant pas compte de la dépendance de la chaleur massique de la température. On donne donc des approximations des capacités thermiques massiques pour un certain nombre de corps.

Éléments	Chaleurs Massiques ($Jkg^{-1}K^{-1}$)	Éléments	Chaleurs Massiques ($Jkg^{-1}K^{-1}$)	Éléments	Chaleurs Massiques ($Jkg^{-1}K^{-1}$)
fer	460	cuivre	384	aluminium	895
glace	2090	eau	4185	mercure	138
pétrole	1670	soufre	745	Ethanol	2430

III-3) Chaleur latente

Pendant les changements d'état des corps (fusion, vaporisation, ...), la température reste constante. Il est donc clair que la formule précédente

$\boxed{Q = m.c.\Delta T}$

ne tient plus puisque l'on a $\Delta T = 0$ mais pas $Q = 0$! Il faut fournir de la chaleur pour le changement d'état mais sans augmentation de la température. On définit alors une nouvelle notion, la chaleur latente de changement d'état.
Chaleur latente : $l = dQ / dm = Q / m$ soit $\boxed{Q = m.l}$
On donne pour information quelques valeurs de chaleur latente.

Fusion de la glace : $l_f = 3{,}337.10^5$ J/kg.	vaporisation de l'eau $l_v = 2{,}2510^6$ J/kg
Fusion du benzène : $l_f = 1{,}25.10^5$ J/kg.	vaporisation du benzène $l_v = 3{,}910^5$ J/kg
Fusion de l'oxygène : $l_f = 1{,}4.10^4$ J/kg.	vaporisation de l'oxygène $l_v = 2{,}110^5$ J/kg

III-4) Exercices

Exercice 5

L'étain fond à 323°C. La chaleur latente de fusion de l'étain est de 61 kJ/kg et sa capacité calorifique vaut 250 $Jkg^{-1}K^{-1}$. Calculer l'énergie nécessaire pour faire fondre les 20 kg d'étain contenus dans une machine à souder à la vague et initialement à la température de 20°C. Exprimer le résultat en Joules et en kilowattheures.

Exercice 6

On prend un bloc de glace de 1,5 kg à -10°C.
1°) Quelle quantité de chaleur faut-il lui apporter pour le transformer complètement en vapeur ?
2°) On utilise une puissance électrique de 1,5 kW pour réaliser la transformation précédente. Combien de temps a-t-on mis ?

Exercice 7

Quelle quantité d'eau à 100°C faut-il verser sur 10g de glace prise à 0°C pour obtenir uniquement de l'eau liquide à 0°C (on supposera qu'il n'y a aucun échange de chaleur avec l'extérieur).

Exercice 8

Un cube de 8 cm^3 de glace de densité 0,90 initialement à une température de -3°C est plongé dans un verre de 50 cm^3 d'eau. En supposant qu'il n'y a aucun échange de chaleur avec l'extérieur quelle est la température finale du mélange ? La température initiale de l'eau est de 15°C.

Info : le record de température basse est de 0,5 10^{-7} K en 2004

TD2 : les transferts de chaleur

Loi de Fourier

Dans un milieu dont la température T(x,t) varie dans la direction de l'axe (Ox), la conduction se manifeste par l'existence d'un vecteur densité de flux thermique orienté dans le sens des températures décroissantes. Joseph Fourier a observé expérimentalement une relation de proportionnalité entre la densité de flux thermique et la dérivée spatiale de la température :

$$\boxed{P=\Phi=\frac{dQ}{dt}=-k\cdot S\cdot\frac{dT}{dx}}$$

k est la conductivité thermique du milieu et se mesure en W/m.K. Φ est donc le flux thermique et se mesure en W.

Ordre de grandeur des conductivités

- Métaux purs : 50 à 500 W/m.K : cuivre 387 W/m.K , aluminium: 203 W/m.K, argent:418W/m.K,
  fer : 73 W/m.K, acier : 36 W/m.K, plomb : 35 W/m.K
- Alliages : 10 à 100 W/m.K
- Solides non métalliques : 10^{-2} à 10 W/m.K : SiC (céramique) 50-100 W/m.K quartz : 19,6W/m.K, marbre : 2,8 W/m.K, eau (glace) : 2,2 W/m.K, pyrex 1 W/m.K, bois 0,12W/m.K,
  béton : 0,92 W/m.K
- Liquides : 10^{-1} à 1W/m.K : mercure : 8,2W/m.K, eau : 0,55W/m.K
- Matériaux isolants : 10^{-2} à 1 W/m.K : laine de verre 0,04 W/m.K, polystyrène 0,004 W/m.K
- Gaz à la pression atmosphérique:10^{-3} à 10^{-1}W/m.K : hydrogène : 0,17 W/m.K, air : 0,024W/m.K, hélium : 0,14 W/m.K
- Superisolants thermiques 10^{-4} W/m.K

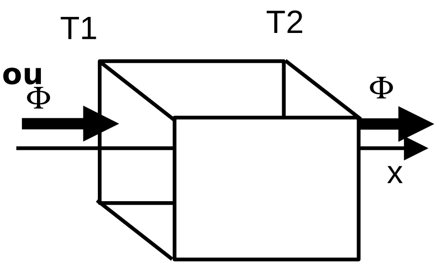
Remarque : il est à noter que les deux unités W/m.K et W/m.°C sont les mêmes unités.

Notion de résistance thermique


Je retiens

R_{th} = (T_1-T_2)/ Φ en [°C/W ou K/W]

Φ = k.S.(ΔT/l)



La disparition du signe "-" tient aux conventions qui sont prises ici : le flux thermique Φ est considéré comme arrivant sur la surface de température T1, et ce flux est considéré comme positif dès qu'il est entrant. De toute façon, comme la résistance électrique la résistance thermique doit toujours être positive.

Exercice 1 (La chaleur dans un parallélépipède)

Soit un conducteur thermique de section S rectangulaire et constante comme à la figure ci-dessus.
Sa longueur est supposée être L.
A l'aide des définitions ci-dessus, établir :
- l'expression du flux thermique Φ,
- l'expression de la résistance thermique R_{th} de ce parallélépipède,
- l'expression de la température en fonction de la position x.

Remarque : la formule trouvée dans cet exercice sera considérée comme générale, même si en principe elle nécessite une section S constante.

Exercice 2 (texte en anglais)
A heat rate of 3 kW is conducted through a section of an insulating material of cross-sectional area 10 m^2 and thickness 2.5 cm. If the inner (hot) surface temperature is 415°C and the thermal conductivity of the material is 0.2 W/m.K, what is the outer surface temperature ?
to insulate : isoler.

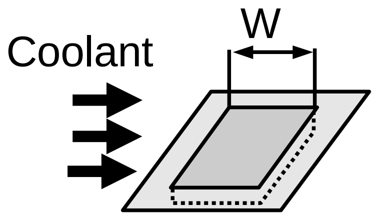
Exercice 3
Un distributeur de boisson a la forme d'un cube de 65 cm de côté (extérieur). Ses parois de 3 cm d'épaisseur sont en plastique (k=0,05 W/m.K) Si la température extérieure est de 20°C, quelle est la quantité de glace qui fond par heure à l'intérieur du distributeur ? (Température initiale de la glace 0°C)

La convection

La convection est le mode d'échange de chaleur privilégié dans un fluide. Si l'on met en contact un solide et un fluide des phénomènes convectifs vont apparaître. Il faut alors modéliser les échanges thermiques.
Loi de newton : l'échange thermique par convection est proportionnel à la différence de température et à la surface : $\Phi=h_c.S(T_1-T_2)$ (A comparer à $\Phi=(1/k).S.(T_1-T_2)/L$ pour la résistance thermique)
T_1: température du solide, T_2 : température du fluide loin de la paroi.
Pour cette loi, seule compte la différence de température et non plus le gradient de température.
h_c est un coefficient de convection qui dépend des matériaux en contact, de l'état de surface , du type d'écoulement fluide.
- air en convection libre : h_c= 6 à 30 W/m^2.°C.
- air en convection forcée : 30 à 300 selon la vitesse d'écoulement.
- huile en convection forcée : 60 à 1 800.
- eau en convection forcée : 300 à 12 000.
- vapeur d'eau en condensation sur une surface froide : 6 000 à 120 000.

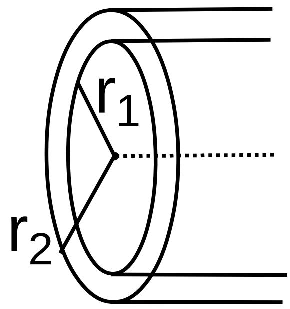
Loi générale : souvent la convection naturelle est mieux traduite par la formule suivante:
$\Phi = h_c.S\ (T_1 - T_2)^{1.25}$ mais on utilisera dans la suite toujours la loi de Newton.

Exercice 4 (texte en anglais)



A square isothermal chip is of width W=5 mm on a side and is mounted in a substrate such that its side and back surfaces are well insulated, while the front surface is exposed to the flow of a coolant at T=15°C. From reliability considerations, the chip temperature must not exceed T=85°C. If the coolant is air and the corresponding convection coefficient is h=200 W/m^2.K, what is the maximum allowable chip power ? If the coolant is a dielectric liquid for which h=3000 W/m^2.K, what is the maximum allowable chip power ?

Exercice 5 (Température dans un câble électrique)



Un conducteur électrique a une section circulaire de rayon r_1, une longueur L, une conductivité électrique σ et une conductivité thermique K_1. Il est entouré d'une gaine isolante de rayon r_2 et de conductivité thermique K_2. On fait passer un courant I dans le conducteur. L'air ambiant est à la température T_0.

1°) Le flux thermique qui arrive dans l'isolant correspond à la puissance dissipée par effet Joule. Calculer cette puissance.
2°) Calculer la résistance thermique de l'isolant cylindrique. En déduire la température T_1 de la surface du conducteur.
3°) En fait, au contact isolant / air, il s'établit des échanges thermiques superficiels définis par la loi de Newton : une section s de la surface latérale de la gaine dont la température vaut $T(r_2)$, échange avec l'air un flux thermique : $\Phi = h(T(r_2) - T_0)s$.
Quelle est alors la température superficielle du conducteur?
Données : $\sigma=5.10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$, K_1=400W.m^{-1} K^{-1}, K_2=0,4W.m^{-1} K^{-1}, r_1=0,5 cm, r_2=2cm, I=100 A T°=300K h=20W.m^{-2} K^{-1}.

TD3 : calcul des puissances électriques

Vous connaissez plusieurs formules pour le calcul des puissances : P = U.I, P = U.I.cosϕ etc...

La formule générale du calcul d'une puissance électrique dans le cas d'un courant et/ou d'une tension périodique est :

Je retiens

$$\boxed{P=\frac{1}{T}\int_0^T u(t).i(t).dt}$$

Cette formule générale se simplifie dans deux cas particuliers importants :

<u>Courant i(t) constant égal à I</u>

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T u(t).i(t).dt=\frac{1}{T}\int_0^T u(t).I.dt=I\cdot\frac{1}{T}\int_0^T u(t).dt=I\,U_{moy}$$

$$\boxed{P=\frac{1}{T}\int_0^T u(t).i(t).dt=I\,U_{moy}}$$

<u>Tension u(t) constante égale à U</u>

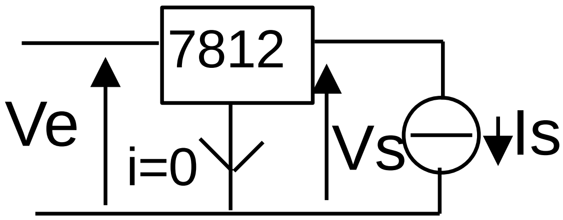
$$P=\frac{1}{T}\int_0^T u(t).i(t).dt=\frac{1}{T}\int_0^T i(t).U.dt=U\cdot\frac{1}{T}\int_0^T i(t).dt=U\,I_{moy}$$

$$\boxed{P=\frac{1}{T}\int_0^T u(t).i(t).dt=U\,I_{moy}}$$

<u>Remarque</u> : N'oubliez pas que parfois le calcul d'une moyenne ne nécessite pas de se lancer tête baissée dans le calcul d'une intégrale mais que des raisonnements simples permettent de la trouver !

Dans tous les autres cas, il sera nécessaire de calculer l'intégrale.

<u>Exercice 1</u>



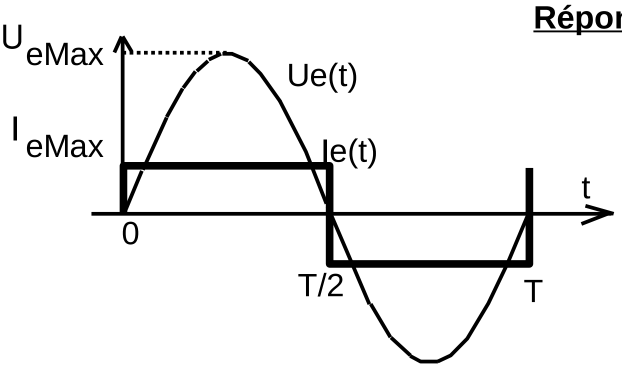
Un régulateur de tension intégré 7812 est destiné à fournir à sa sortie une tension Vs constante et égale à 12 V. Un récepteur consomme un courant constant Is=0,8A. Par contre, à l'entrée du régulateur se trouve un redresseur double alternance filtré par un condensateur délivrant une tension Ve.

1°) Représenter Ve(t) si on suppose qu'elle varie entre 16 et 20 V.

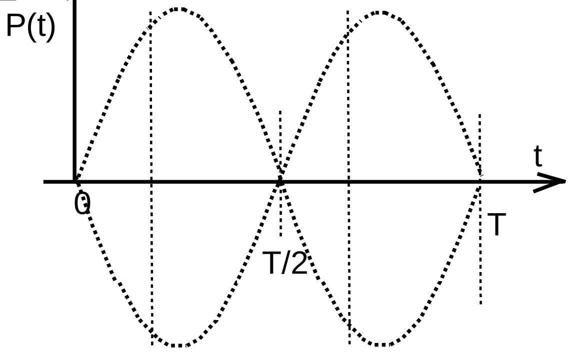
2°) En assimilant la tension d'entrée à une tension triangulaire, on vous demande de calculer la puissance dissipée dans le régulateur.

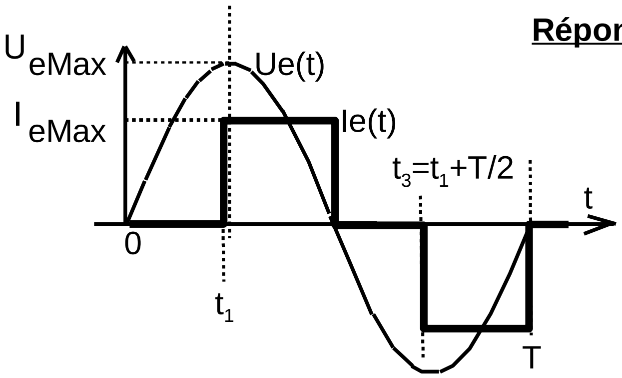
Exercice 2 Puissance instantanée

1°) Pour chacune des courbes ci-dessous faire le produit du courant par la tension pour obtenir la puissance instantanée.

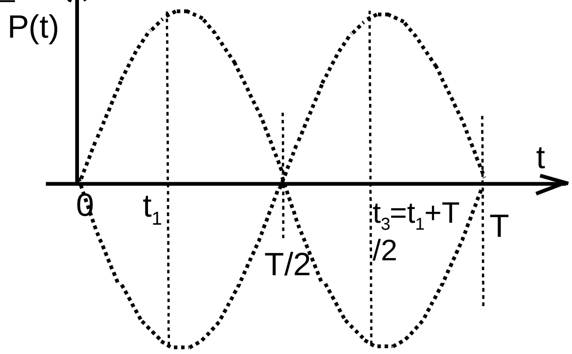


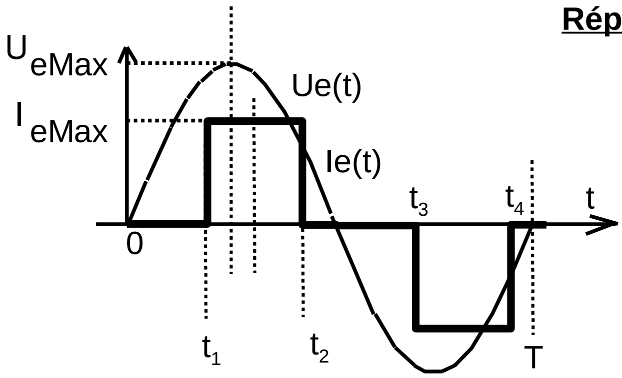
Réponse :



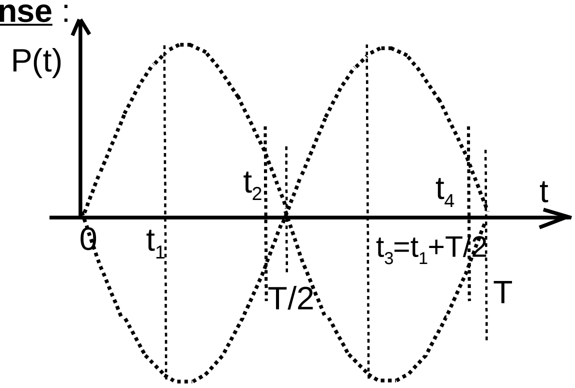


Réponse :

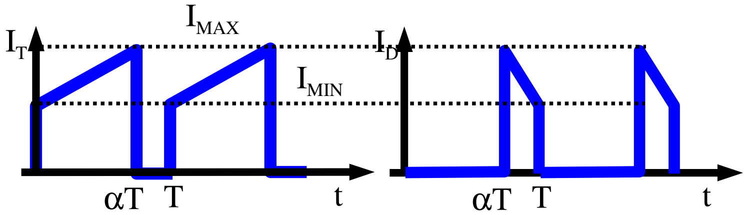




Réponse :



2°) Utiliser la géométrie des trapèzes pour calculer la puissance moyenne correspondant aux deux courants ci-dessous si la tension est constante lors du passage d'un courant et égale à V_{cond}.



Exercice 3

1°) On donne sur la figure 2 l'allure du courant Ie et de la tension Ve aux bornes d'entrées d'un redresseur (f = 50 Hz).
Calculer la puissance électrique moyenne en entrée sur une demi-période :

$$P_e = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_{eMax} \cdot \sin(\omega t) \cdot I_{eMax} \cdot dt$$

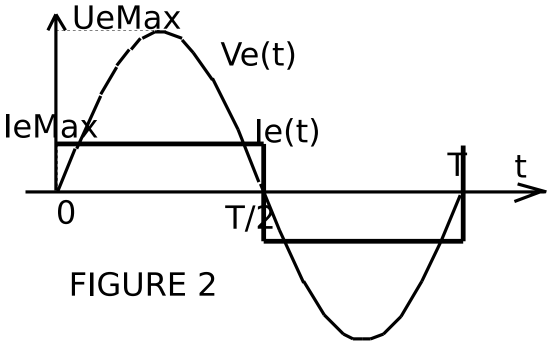


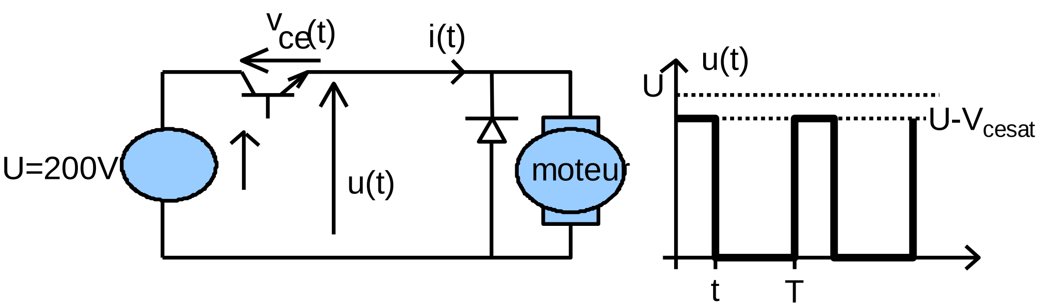
FIGURE 2

(Sur une demi-période I_e est constant égal à I_{eMAX} = 10A et U_{eMAX} = 120V)
Que vaut P_e sur une période ?

2°) On rappelle que lors d'un redressement double alternance, chaque diode conduit sur une demi-période. Sachant que pendant sa conduction une diode a une tension de 1,1 V et est traversée par le courant I_{eMAX}, quelle est la puissance moyenne dissipée dans chaque diode sur une demi-période, sur une période ?

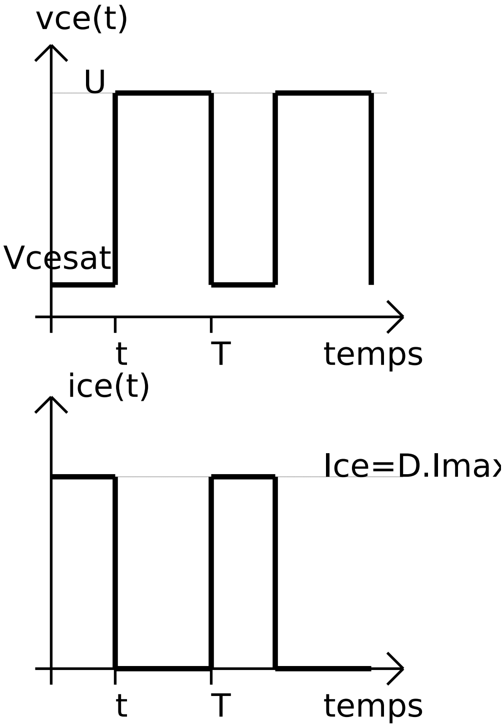
Exercice 4

Un moteur électrique à courant continu est commandé par un hacheur à transistor dont on désire étudier le comportement thermique en vue de dimensionner un radiateur destiné au transistor. Le schéma de principe est donné ci-dessous :



Le principe d'un tel système est de faire varier la vitesse du moteur en faisant varier le rapport cyclique D=t/T. Dans toute la suite du problème T sera fixé à T=1 ms.

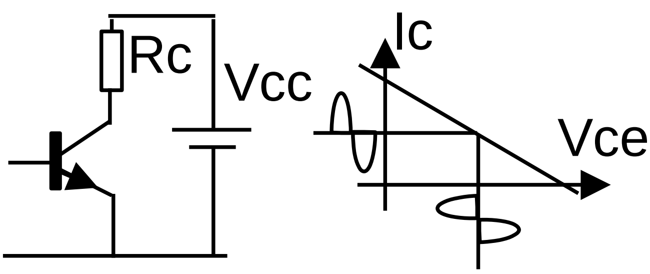
1°) Lorsque le rapport cyclique est de D=1, le moteur absorbe un courant constant de I_{max}=10 A et la diode n'est traversée par aucun courant. La tension aux bornes du transistor $v_{ce}(t)$ est constante et a pour valeur : V_{cesat}=1,8V. Quelle est la puissance dissipée dans le transistor et quelle est alors la puissance fournie par la source de tension ?



2°) Le moteur est supposé suffisamment inductif pour que le courant le traversant soit constant. On suppose que la charge du moteur impose que le courant qui traverse le moteur soit proportionnel au rapport cyclique. Pour le courant et la tension ci-contre aux bornes du transistor, calculer la puissance moyenne dissipée dans ce composant et représenter sur une courbe la variation de la puissance instantanée correspondante.
Application numérique : D=0,5

Exercice 5 Puissance dissipée.

Un transistor est polarisé en classe A selon le montage ci-dessous où l'on n'a pas représenté la polarisation de la base.

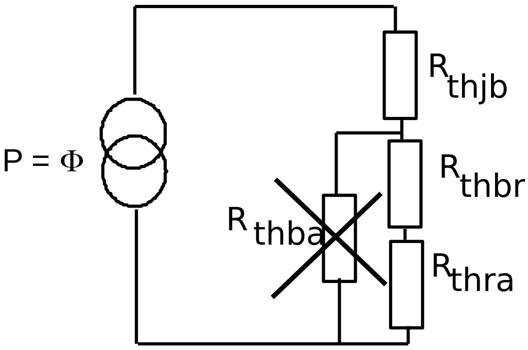


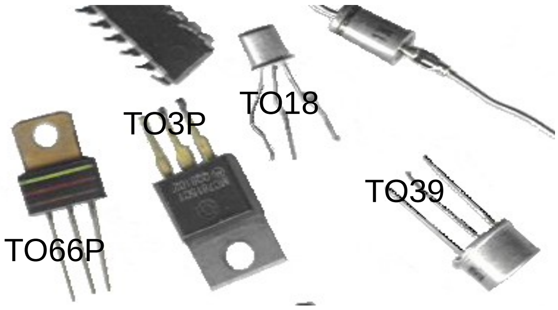
La résistance Rc est de 24 Ω et la tension de polarisation de Vcc=48V.
Le courant I_c est composé d'une partie continue I_C et d'une partie variable i_c ici sinusoïdale : $I_c=I_C+i_c$.
Calculer la puissance dissipée en l'absence de signal sinusoïdal (ic=0).
Calculer la puissance dissipée pour un signal sinusoïdal de sortie maximal (en négligeant $V_{CEsat}=0$). Comparer.

TD4 : calcul des radiateurs thermiques

1°) Calcul des radiateurs en régime permanent

La puissance à dissiper par un semi-conducteur est calculée en faisant le bilan des puissances
électriques P mises en oeuvre. Lorsqu'on passe à la partie thermique elle devient Φ (notation traditionnelle de la thermique). Un composant électronique est modélisé par un certain nombre de résistances thermiques comme indiquées ci-dessous : (j = jonction, b = boîtier (case en anglais mb pour mountingbase), r = radiateur (h=heatsink en anglais), a = ambiant (ambient en anglais))





Résistances thermiques boîtier TO		
Boîtier	R_{thja}	R_{thjb}
TO-18	500	200
TO-92	250	150
TO-39	200	12,5
TO-126	100	5
TO-220	70	2
T0-3	40	1,5

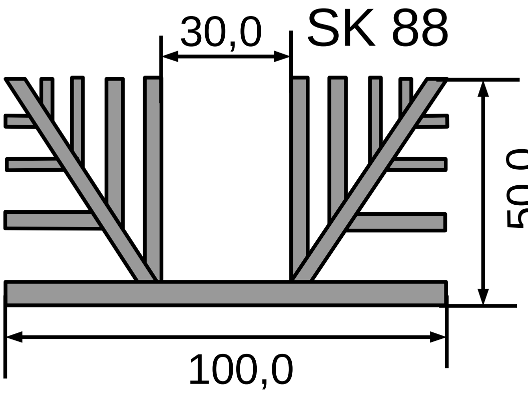
Techniques de montages et R_{thbr}	
	R_{thbr}
sans plaquette d'isolation sans pâte	0,05 à 0,2
sans plaquette d'isolation avec pâte	0,005 à 0,1
plaquette oxyde Al avec pâte	0,2 à 0,6
plaquette mica avec pâte	0,4 à 0,9
plaquette en silicone sans pâte	0,84 à 0,88

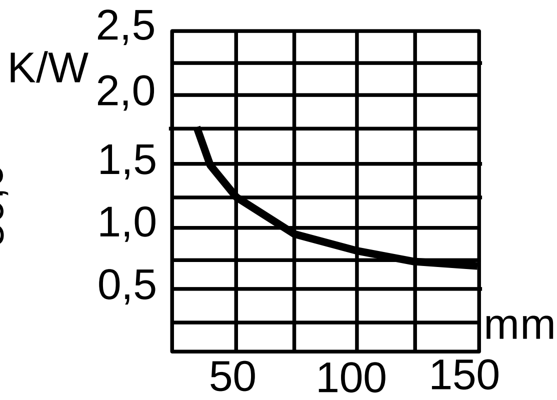
Exercice 1
On se replace dans le cas de l'exercice 1 du TD précédent sur le 7812.
Pour des raisons de fiabilité, la température du substrat de silicium du C.I. ne doit pas dépasser 130°C, la température ambiante dans l'appareil est de 40°C.
La résistance thermique de la jonction au boîtier dépend du type de boîtier. Pour le boîtier du type TO-220, la résistance thermique est $Rth_{JB} = 2\ KW^{-1}$.
Entre le boîtier est le radiateur, il faut insérer une rondelle de mica qui assure l'isolation électrique et un bon contact thermique à l'aide d'une pâte thermoconductrice. Cette rondelle avec la pâte possède une résistance de 1 KW^{-1}.
Quelle doit être la résistance thermique du radiateur ?

Exercice 2 (Calcul d'un radiateur)

T0-3

Un transistor de puissance à boîtier TO-3 est soumis à une tension émetteur-collecteur de 20V. Le courant d'émetteur est de 3 A. Quelle est la puissance électrique à dissiper ? Quelle sera la température de jonction si l'on ne lui ajoute pas de radiateur et que la température ambiante est Ta=25°C ?
On suppose que la température de jonction Tj peut atteindre 200°C. Quelle est la résistance thermique totale que l'on ne doit pas dépasser ?
Choisir la solution la plus favorable pour fixer le radiateur sur le boîtier avec isolation. Que prendra-t-on donc comme résistance R_{thbr} ? Quelle doit-être la résistance R_{thra} ? Quelle longueur de radiateur de type SK88 devra-t-on choisir ?

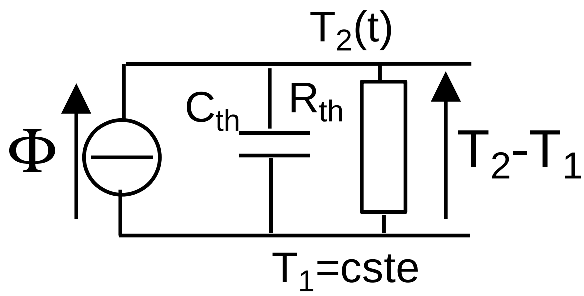




2°) Calcul des radiateurs en régime transitoire

Exercice 3

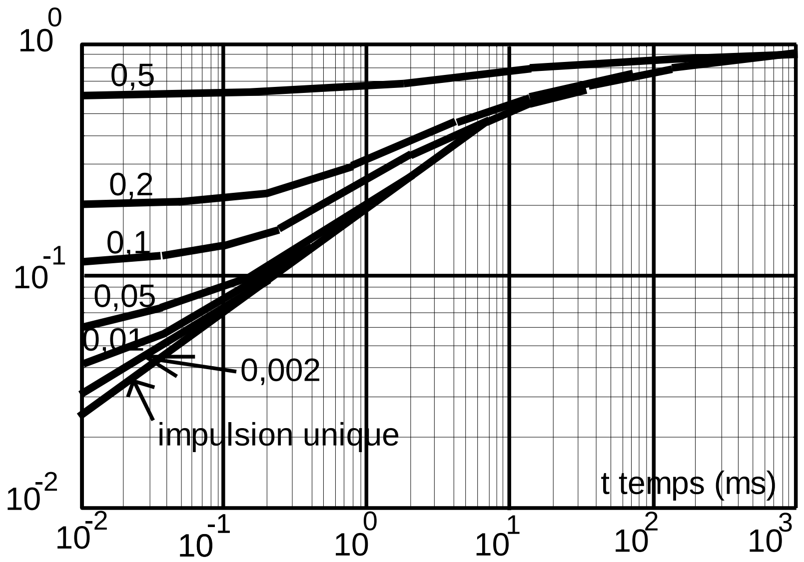
Un composant électronique est modélisé par une résistance thermique R_{th} et une capacité thermique C_{th}. Il est soumis soudainement à un échelon de puissance Φ. Exprimer l'équation différentielle liant Φ, R_{th}, C_{th} et $T_2(t)$-T_1. Quelle est la valeur asymptotique de $T_2(t)$?
Refroidissement : Le composant précédent a atteint la température T_2, nous le laissons se refroidir. Donner l'équation différentielle et sa solution.



Une puissance périodique Φ de période T et de rapport cyclique α=0,5 est dissipée dans le composant. On prend $T \ll T_{th} = R_{th}.C_{th}$.
Dessiner l'allure de T(t) et établir la valeur de la température moyenne de la jonction.

Impédance thermique

Remarque : l'impédance thermique peut être donnée avec le coefficient r(D,t) comme ci-dessous mais aussi directement comme un peu plus loin ! On note la puissance de manière un peu plus classique P au lieu de Φ.



Courbes r(t,D) en fonction du rapport cyclique D et t avec :
* D = t/T
* t : durée de dissipation
* T : période

Permet de calculer l'impédance thermique :

Zth=r(t,D).Rth

Transistor 2N5632

<u>Exercice 4 (</u>Température de jonction en impulsion)

Une impulsion de puissance de 50 W est envoyée sur un transistor 2N 5632. Sa durée est t=5ms, le boîtier est à 75°C, la résistance thermique Rth_{jb} est de 1,17°C/W.
Quelle est la température maximale atteinte ?
Maintenant les impulsions de puissance sont périodiques (T= 20ms). Quelle est alors la température de crête pour un rapport cyclique D=0,5 ?
Quelle est alors la température moyenne de la jonction ?

Pour des impulsions périodiques brèves le boîtier (comme le radiateur s'il y en a un) n'est sensible qu'à la puissance moyenne du fait de sa forte inertie thermique (sa grande constante de temps thermique). La jonction atteint une température donnée par :


Je retiens

$$Tj_{crête} = P_{crête} . (r(t,D).Rth_{jb} + D.Rth_{ba}) + Ta$$

$$Tj_{moyen} = P_{crête} . D . (Rth_{jb} + Rth_{ba}) + Ta$$

<u>Exercice 5</u>

Un transistor Darlington BDX 63 travaille en impulsion de puissance de durée t=1 ms et de périodicité T= 10ms, avec $T_{j\,max}$= 200°C, T_{amb}=75°C.
Dans un premier temps, il n'est pas fixé sur radiateur (R_{thba} = 26°C/W), déterminer sa puissance maximum admissible.
Nous le fixons sur un radiateur de R_{thba} = 1.5°C/W, même question.

Transistor de puissance darlington NPN

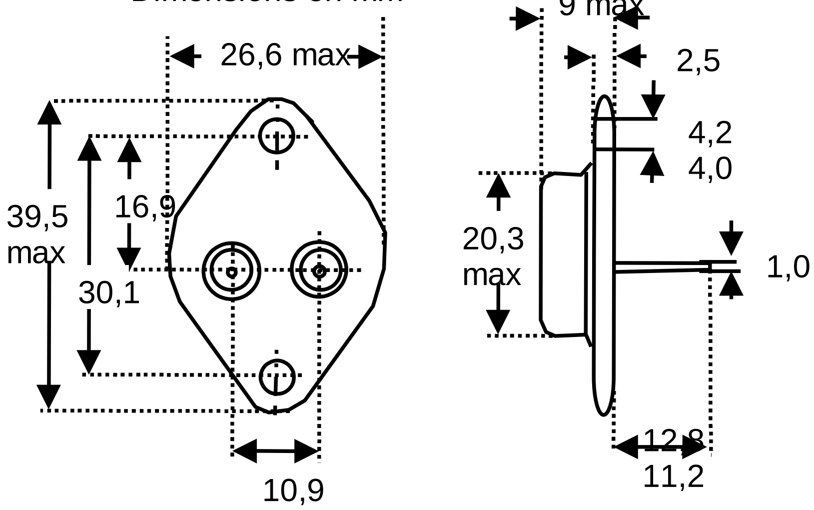
RTC

BDX63 – BDX 63A
BDX 63B – BDX63C

Caractéristiques principales

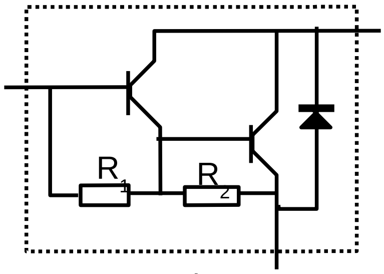
Puissance maximale T_{mb}<25°C 90W
Température de jonction T_j 200°C
Courant collecteur en continu I_C 8A
Courant collecteur en pointe max 12 A

Données mécaniques boîtier TO-3



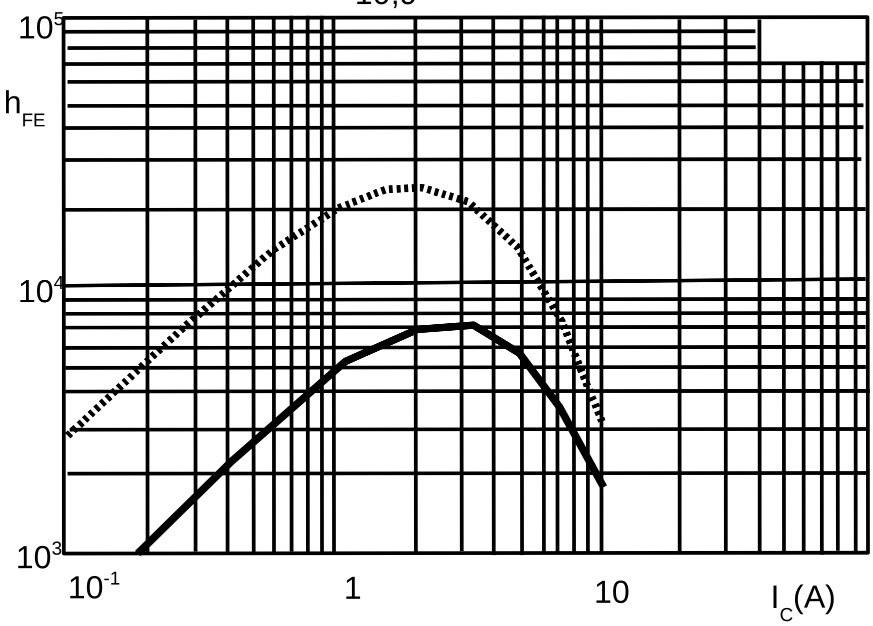
Résistance thermique

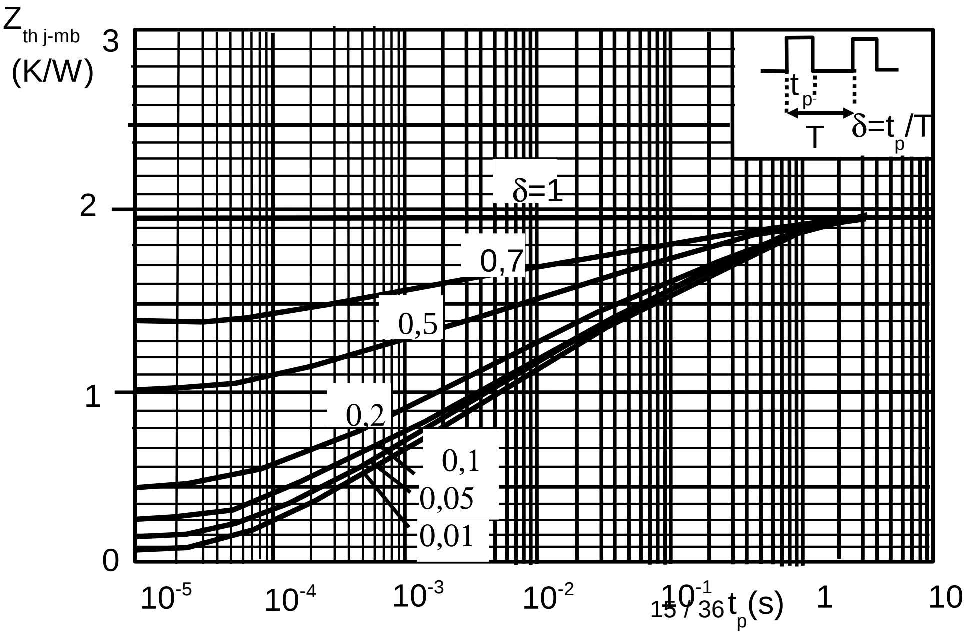
Jonction-fond de boîtier
$R_{th\ j\text{-}mb}$ =1,94 K/W



R_1 typ 8kΩ

R_2 typ 100Ω





TD5 Cinématique du point

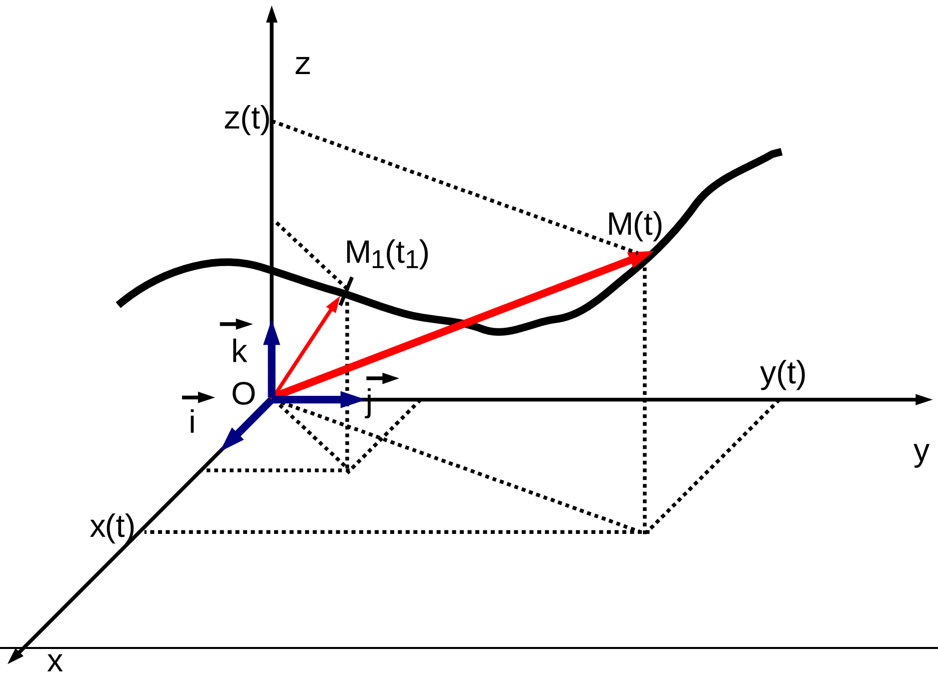
Des vecteurs pour se repérer et trouver vitesses et accélérations

Vecteur position

Pour étudier le mouvement d'un point M au cours du temps, il est nécessaire de :

- préciser le référentiel et le repère qui lui est lié $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- préciser la position du point par son vecteur position : $\overrightarrow{OM(t)} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$

Remarque : on utilise parfois l'abscisse curviligne $s = \widehat{O'M}$ sur la trajectoire curviligne d'origine O'.



Vecteur vitesse

Par définition le vecteur vitesse est la dérivée première du vecteur position :

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{k}$$ (vitesse instantanée : unité $m.s^{-1}$)

A tout moment le vecteur $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire.

On peut définir un vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire, dirigé dans le sens des abscisses curvilignes croissantes et dont l'origine est le point M se déplaçant sur la trajectoire. Le vecteur vitesse s'écrit alors :

$$\vec{v} = \frac{d\widehat{OM}}{dt} \cdot \vec{T} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} = v \cdot \vec{T}$$ (où v est la mesure algébrique de $\vec{v}$ sur $\vec{T}$)

Vecteur accélération

Le vecteur accélération est défini par

$$\overrightarrow{a(t)}=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{OM(t)}}{dt^2}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}\cdot\vec{i}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}\cdot\vec{j}+\frac{d^2z(t)}{dt^2}\cdot\vec{k}$$ (unité $m.s^{-2}$)

Exercice 1
Dans un référentiel lié à la terre, la trajectoire d'un point est repérée par x(t)=A.sin(ωt) et y(t)=B.cos(ωt) et z(t)=0.

1°) Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$

2°) Calculer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}$

3°) Quel est le type de trajectoire suivie par le point matériel ? Représenter $\vec{v}$ et $\vec{a}$ pour t=0, t=$\pi/2\omega$, t=π/ω et t=$3\pi/2\omega$.

Base de Frenet

La base de Frenet est composée du vecteur $\vec{T}$ précédemment défini (tangent à la trajectoire) et d'un vecteur $\vec{N}$ normal à $\vec{T}$ donc à la trajectoire. ($\vec{N}$ est orienté vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire). Cette base n'est pas fixe puisqu'elle dépend du point de la trajectoire où se trouve le point M. Son intérêt est qu'elle permet de d'écrire le vecteur accélération sous la forme :

$\vec{a}=a_T\cdot\vec{T}+a_N\cdot\vec{N}$ avec $a_T=\frac{dv}{dt}$ accélération tangentielle et $a_N=\frac{v^2}{\rho}$ où v est le module du vecteur vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré (ρ=R=cste si la trajectoire est un cercle). A_T et a_N sont évidemment des fonctions du temps.

Exercice 2

Calculer le rayon de courbure de la trajectoire de l'exercice précédent aux points correspondant aux temps t=0, t=$\pi/2\omega$, t=π/ω et t=$3\pi/2\omega$.

Les principaux types de mouvement

- Le mouvement rectiligne et uniforme : un mobile est en mouvement rectiligne et uniforme si son vecteur vitesse reste constant : $\vec{v}=\vec{v}_0=\overrightarrow{cste}$. Le vecteur accélération du point mobile est donc nul.
- Le mouvement rectiligne uniformément varié : un mobile est en mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est rectiligne et si son vecteur accélération est constant : $\vec{a}=\vec{a}_0=\overrightarrow{cste}$. Les vecteurs $\vec{a},\vec{v}\,et\,\overrightarrow{OM}$ sont alors colinéaires. Le mouvement est uniformément accéléré si $\vec{a}\cdot\vec{v}>0$ ($\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de même sens). Le mouvement est uniformément retardé si $\vec{a}\cdot\vec{v}<0$ ($\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires)
- Le mouvement circulaire pour lequel la trajectoire est un cercle. Dans ce cas :

– le rayon de courbure de la trajectoire est constant r=R=constante

– L'abscisse curviligne s'écrit s=Rθ où θ est l'angle, en radians, repérant la position du point M sur le cercle. S et θ sont, bien sûr, des fonctions du temps.

On en déduit :

– la vitesse linéaire tangentielle : $v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\theta}{dt}=R\omega$ ($\omega=\frac{d\theta}{dt}$ est appelée vitesse angulaire).

– L'accélération tangentielle : $a_T=\frac{dv}{dt}=R\cdot\frac{d\omega}{dt}=R\frac{d^2\theta}{dt^2}=R\dot{\omega}=R\ddot{\theta}$ et

$\vec{a_T}=R\frac{d\omega}{dt}\vec{T}$. La quantité $\frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire.

– L'accélération normale : $a_N=\frac{v^2}{R}=\omega^2\cdot R$ et $\vec{a_N}=\frac{v^2}{R}\cdot\vec{N}=R\cdot\omega^2\cdot\vec{N}$

<u>Cas particulier</u> : mouvement <u>circulaire uniforme</u>.

Le cercle est, dans ce cas, décrit à la vitesse v constante (en module). On a alors ω=cste, a_T=0 et $a_N=\omega^2R$=cste.

On appelle période la quantité $T=2\pi/\omega$.

<u>Exercice 3</u>

Une bille assimilée à un point matériel, est lancée dans le sens montant dans une gouttière rectiligne inclinée (voir figure 1). Dans le repère $(0,\vec{i})$ (ascendant) choisi selon la trajectoire, à la date t=0, la bille occupe la position M_0 (x_0=5m) et a une vitesse $\vec{v_0}=3\cdot\vec{i}$. Elle est soumise à une accélération constante $\vec{a}=-2\cdot\vec{i}$

1°) A quelle date t_1 et en quel point M_1 la bille s'arrête-t-elle ?

2°) A quelle date t_2 repasse-t-elle en M_0 ? Quel est alors son vecteur vitesse ?

3°) A quelle date t_3 passe-t-elle à l'origine ?

4°) Préciser les phase de son mouvement pour $t\geqslant 0$

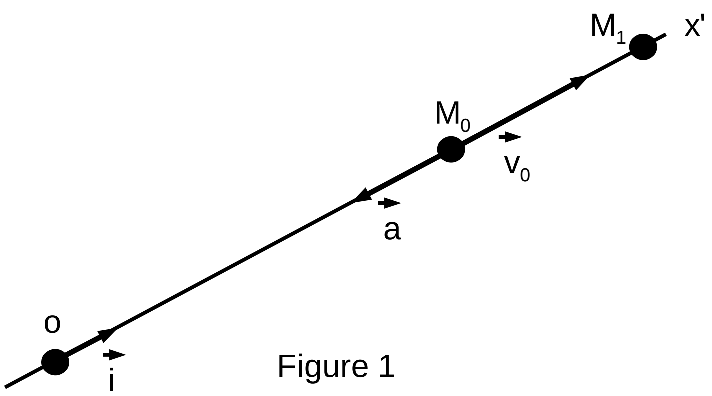


Figure 1

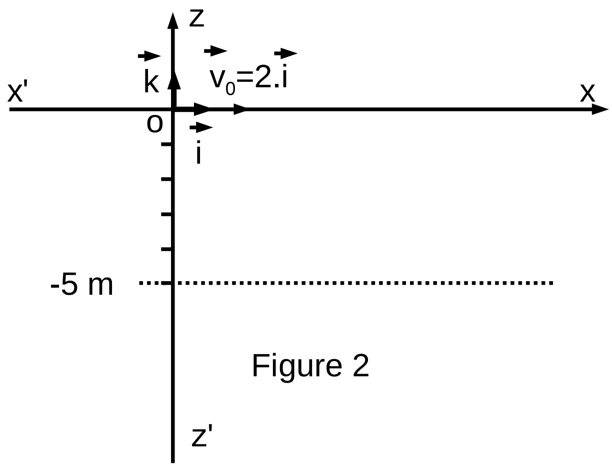


Figure 2

<u>Exercice 4</u> Mouvement parabolique

Dans le repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{k})$ ($\vec{k}$ vertical ascendant voir figure 2) un projectile M supposé ponctuel est lancé dans l'espace à partir du point O à la date t=0 avec une vitesse $\vec{v_0}=2\cdot\vec{i}$. Il subit une accélération constante $\vec{a}=-10\cdot\vec{k}$.

1°) Montrer que la trajectoire est plane. Déterminer ce plan.

2°) Écrire les lois horaires x(t) et z(t) du mouvement du projectile puis l'équation cartésienne z=f(x) de sa trajectoire.

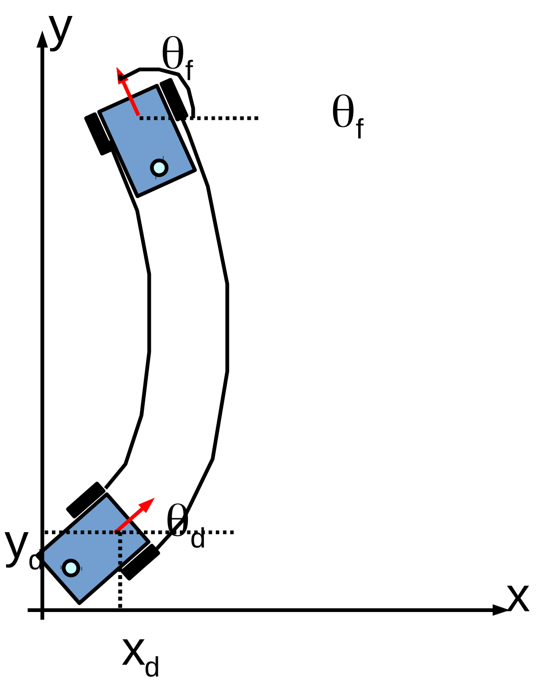
3°) A la date t_1=0,5s déterminer :

- le vecteur vitesse $\vec{v}_1$ du projectile
- le module v_1 de ce vecteur
- les coordonnée de la position M_1 du projectile.

4°) A quelle date t_2 le projectile rencontre-t-il le plan z=-5m ?

<u>Exercice 5</u> Mouvement circulaire uniforme

Un essai avec un <u>Robot MiniQ parfait</u> (qui ne peut exister dans la vraie vie puisque la perfection n'existe pas) a donné le résultat suivant :

Trajectoire suivie	**Données**
	On donne : θ_d = 60° θ_f = 120° Rayon de l'arc de cercle intérieur : R_{int}=32 cm Entre axe entre les roues d=10 cm durée de l'essai : t= 1s

<u>Indications</u> : cet exercice fait appel à la cinématique du solide. On la rend ponctuelle en ne s'intéressant qu'au milieu de l'entre axe.

1°) Quel est le rayon du cercle extérieur R_{ext} ?

2°) En combien de temps réalise-t-on un cercle complet ?

3°) Quelle est la vitesse angulaire correspondante ?.

4°) Quelle est la distance parcourue pendant Δt = 1s sur le cercle intérieur ?
<u>Indication</u> : la longueur d'un arc de cercle est $R\theta$ si θ est exprimé en radian (R=rayon).

5°) Quelle est la distance parcourue pendant Δt = 1s sur le cercle extérieur ?
<u>Indication</u> : la longueur d'un arc de cercle est $R\theta$ si θ est exprimé en radian (R=rayon).

6°) Proposer à l'aide des résultats précédents une durée pour tourner de 90° sur place.

TD6 Mouvement du centre d'inertie d'un solide

Nous allons aborder dans ce chapitre un certain nombre de principes destinés à raisonner de manière dynamique en mécanique, c'est à dire que nous allons faire apparaître des forces et des moments de forces.

Principe fondamental de la dynamique en translation

Centre d'inertie

Par rapport à un point O quelconque, le centre d'inertie (ou centre de gravité) G d'un système de n masses ponctuelles m_i réparties en des points G_i est tel que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OG_i} = m \cdot \overrightarrow{OG} \quad \text{avec} \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Dans toute la suite nous supposerons, dans un premier temps, que les solides étudiés sont ponctuels (confondus avec leur centre d'inertie).

Si on appelle v_G la vitesse du centre de gravité d'un solide, le vecteur quantité de mouvement de ce solide est défini par :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v_G} \quad \text{(unité kg.m.s}^{-1}\text{)}$$

Principe d'inertie

Dans un repère galiléen, un point matériel isolé (c'est à dire soumis à aucune force) ou pseudo-isolé (c'est à dire tel que $\sum \vec{F} = \vec{0}$) :

- soit conserve son état de repos s'il était préalablement au repos
- soit est animé par d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Ce principe s'applique aussi au centre de gravité d'un solide isolé ou pseudo-isolé.

Principe fondamental de la dynamique

Dans un repère galiléen, la somme vectorielle de toutes les forces appliquées à un solide est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du solide à cet instant :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(l'unité est le Newton : N=kg.m.s}^{-2}\text{)}$$

Remarque : les deux principes énoncés ci-dessus montrent que la quantité de mouvement est une grandeur qui se conserve pour les solides isolés ou pseudo-isolés.

Théorème du centre d'inertie

Dans un repère galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un solide est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a_G}$$

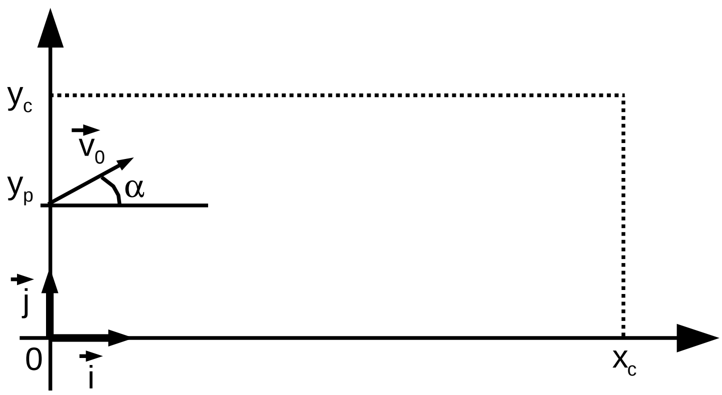
Cas particulier de la pesanteur

Le poids est une force verticale (dirigée vers le centre de la terre). Il est caractérisé par une accélération notée g=9,81 ms^{-2}. Cette valeur n'est pas une constante. Elle dépend de la position géographique car la terre n'est pas sphérique ainsi que de l'altitude. Nous n'étudierons pas ces variations cette année.

Exercice 1

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ une cible a pour coordonnées x_c=30m, y_c=20m.
A partir d'un point P de coordonnées x_p=0m et y_p=10m, un projectile est lancé avec une vitesse initiale de module v_0 = 50ms^{-1} sous un angle α. On donne g=10ms^{-2} et

$$\frac{1}{cos^2\alpha}=1+tan^2\alpha$$



1) Quelles sont les composantes du vecteur accélération ?

2) En déduire les composantes du vecteur vitesse ?

3) Donner les équations horaires du mouvement du projectile ?

4) En déduire l'équation cartésienne du mouvement y=f(x) ?

5) Déterminer les angles de tir qui permettent d'atteindre la cible en écrivant une équation du second degré en tan(α) en prenant soin de calculer chacun des coefficient ?

6) En déduire les deux valeurs de tan(α) ainsi que les angles correspondants :

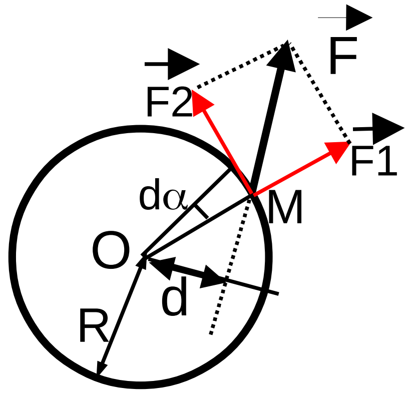
Principe fondamental de la dynamique en rotation

Moment d'une force

Nous présentons ci-contre une rotation vue de dessus. Un point matériel est soumis à une force F mais ce point ne peut décrire qu'une trajectoire qui est un cercle. C'est ce qui se passe quand vous ouvrez une porte.

On appelle moment de la force F le produit vectoriel :

$$\boxed{\overrightarrow{M_{F/\Delta}}=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}}$$



Pour ne pas travailler avec ce produit vectoriel, nous décomposons la force F comme indiqué sur la figure.

F et tangent au mouvement :

$$M_{F/\Delta}=M_{F_1/\Delta}+M_{F_2/\Delta}=OM\cdot F_2=d\cdot\|\vec{F}\|$$ (unité N.m)

d s'appelle le bras de levier.

Moment d'inertie

Le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ sera noté I. Il vaut si l'on a un ensemble de masses discret :

$$\boxed{I_{/\Delta}=\sum_{i=0}^{i=n} m_i \cdot r_i^{\,2}}$$ (unité kg.m²)

Dans le cas général où les masses ne sont plus discrètement réparties mais continûment réparties, il se calcule par la formule :

$$I_{/\Delta}=\iiint_V r^2 \cdot dm=\iiint_V r^2 \cdot \rho \cdot dv$$

si ρ désigne la masse volumique et dv l'élément de volume.

Méthode de calcul des moments d'inertie

Nous venons de voir que le calcul des inerties I est une intégrale très compliquée. Heureusement elle se simplifie dans des cas simples et c'est justement à ces cas que nous allons nous intéresser.

Comment ce calcul peut-il se simplifier ?

Partons du cas discret. On a vu que $I_{/\Delta}=\sum_{i=0}^{i=n} m_i \cdot r_i^{\,2}$ Or cette somme se simplifie si tous les r_i sont constants et égaux à r. La somme devient alors : $I_{/\Delta}=r^2 \sum_{i=0}^{i=n} m_i$

Dans le cas d'une répartition continue on a la même simplification. Si on arrive à découper le solide dont on cherche le moment d'inertie en tranches extrêmement fines (épaisseur dr) situées à une distance r constante alors la formule se simplifie comme suit (symétrie cylindrique) :

$$\boxed{I_{/\Delta}=\iiint_V r^2 \cdot dm=\iiint_V r^2 \cdot \rho \cdot dv=\int r^2 \cdot \rho \cdot S(r) \cdot dr}$$

La règle d'or du calcul est donc de trouver le découpage en tranches différentielles situées à distance constante de l'axe de rotation. Il s'agit donc de cylindres ou de morceaux de cylindres.

Exercice 2

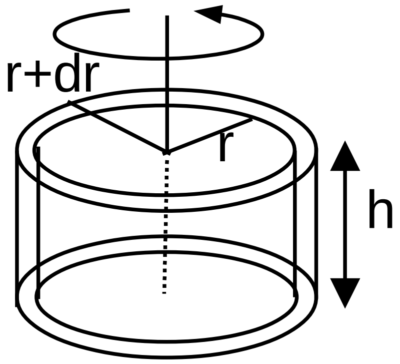
1°) On considère un cylindre de rayon R et de hauteur h.

Exprimer sa surface latérale.

2°) On considère la tranche de cylindre entre les rayons r et r+dr.

Exprimer son volume dv. Si l'on considère que tous ses points sont à la distance r de l'axe de rotation exprimer son inertie dI.

3°) En déduire par intégration les moments d'inertie d'un cylindre homogène de rayon R, d'un volant d'inertie de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 ainsi que celui d'une jante d'épaisseur e <<R. Exprimer toutes ces inerties en fonction de la masse.



Principe fondamental de la dynamique en rotation

Pour qu'un solide tourne à une vitesse constante il faut que la somme totale des moments de l'ensemble des forces soit nul. Lorsque ce n'est pas le cas une accélération angulaire est liée à la somme des moments des forces de la façon suivante :

$$\boxed{\sum M_{F_i/\Delta} = I_{/\Delta} \cdot \frac{d\,\omega}{dt}}$$

Remarque : ce calcul est algébrique, on sépare les forces qui font tourner dans un sens (pris arbitrairement) et les forces qui font tourner dans l'autre sens. Si les moments des premières sont choisis positifs et ceux des deuxièmes sont alors négatifs.

Exercice 3

Les caractéristiques d'un disque audionumérique sont fixées par un standard (livre rouge ou red book)

Diamètre extérieur : 120 mm

Diamètre intérieur : 15 mm

Epaisseur : 1,2 mm

Masse : de 14 à 33g

Sens de rotation horaire (quand le disque est vu de dessus)

Vitesse linéaire : de 1,2 à 1,4 ms^{-1} environ. La vitesse linéaire de lecture est constante et permet d'obtenir un débit des informations audionumériques de 176 400 octets par seconde.

Durée maximale de lecture : 74 mn

Capacité : 840 Mo

Profondeur d'impression ou gravure : 0,13 μm

Pas de la spire :1,6 μm

Largeur de la piste : 0,5 μm

Diamètre du spot laser : environ 1 μm

1°) On rappelle que le moment d'inertie d'un volant d'inertie homogène est donné par la formule : $J = 1/2\ m\ (R^2+r^2)$ si r représente le rayon intérieur et R le rayon extérieur du volant.

En considérant le disque audionumérique comme un volant d'inertie, calculer son moment d'inertie maximal.

2°) Le disque est gravé en spirale en commençant par l'intérieur. Le débit de lecture doit toujours être le même, et ainsi la vitesse linéaire de lecture est constante et fixée à 1,2 ms^{-1}. C'est donc la vitesse de rotation qui varie en fonction de la position r de la tête de lecture sur le rayon (25mm < r <58mm). Calculer les vitesses de rotation en début de lecture et en fin de lecture.

3°) Le disque est supposé immobile. On veut lui faire subir une accélération angulaire constante telle qu'il puisse lire la première piste au bout d'une seconde. La première piste lue est à l'intérieur de la surface enregistrée. Si l'on néglige les frottements, quel sera le couple moteur constant C nécessaire pour réaliser l'accélération constante correspondante ?

4°) (**Question hors TD**) L'information sur la piste en spirale est située à des endroits appelés pits. En schématisant un peu on peut dire que la présence ou l'absence d'une micro-bosse sur un pit correspond à un bit d'information. Le débit D est de 176 400 octets par secondes.

Quelle est la distance séparant deux pits si l'on garde la vitesse linéaire v de 1,2 $m.s^{-1}$?

<u>Réponse</u> : L = 1,2 / 1411200 = 0,85034 μm . (176400 x 8 = 1411200)

<u>Exercice 4</u>

1°) Écrire la relation exprimant le principe fondamental de la dynamique et permettant d'étudier pour un solide mobile autour d'un axe fixe les variations de ω en fonction du temps.

On rappelle que le moment d'inertie d'un cylindre est $1/2mR^2$ que celui d'un volant d'inertie est $1/2m(R^2+r^2)$

2°) Un disque homogène d'épaisseur constante de rayon R, de masse m, tourne à une vitesse angulaire constante $\omega_0>0$ autour de son axe Δ. Il est soumis à un couple moteur C_m et à un couple résistant $-C_r$.

On supprime le couple moteur et l'on constate que la vitesse angulaire varie de façon sensiblement linéaire en fonction du temps, le disque s'arrêtant au bout d'un temps t_1 ; calculer littéralement le couple résistant en fonction de m, R, C_r, t_1 et ω_0. <u>Indications</u> : remplacer $d\omega/dt$ par $\Delta\omega/\Delta t$ avec $\Delta t= t_1$ dans la question 1.

Application numérique : R=15 cm, m=2 kg. Le disque tourne à la vitesse de 45 $tr.mn^{-1}$; t_1=30 s.

3° - a) Le disque partant du repos, calculer numériquement et littéralement, le couple moteur positif constant C_m' nécessaire pour que la vitesse ω_0 soit atteinte en t_2= 5 s. Ne pas négliger C_r.

(<u>Indications</u> : remplacer $d\omega/dt$ par $\Delta\omega/\Delta t$ avec $\Delta t= t_2$ dans la question 1)

b) La vitesse reste, à partir de cet instant, constante parce que l'on remplace C_m' par C_m. Calculer C_m

4°- a) Le disque précédent, toujours soumis au couple C_m' constant et au couple résistant constant $-C_r$ est, en plus, soumis à un couple résistant proportionnel à la vitesse angulaire ω et de module $-f|\omega|$. Le disque partant du repos, écrire l'équation différentielle liant la vitesse angulaire ω et le temps t.

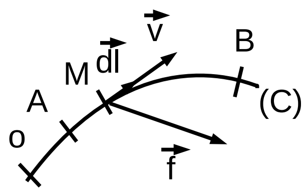
b) Montrer que la vitesse tend vers une valeur limite que l'on calculera.

TD 7 Travail, puissance énergie

Cas de la translation

Travail et énergie potentielle

Travail d'une force



Soit un point matériel M effectuant un déplacement le long d'une trajectoire (C) depuis un point A (instant t_1) jusqu'à un point B (instant t_2) tandis qu'il est soumis à une force $\vec{f}$.

On appelle travail élémentaire dW de la force $\vec{f}$ le produit scalaire :

$$dW(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{dl}$$

où $\vec{dl}$ représente un déplacement élémentaire (infiniment petit)du point M sur sa trajectoire.

Comme $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\vec{dl}}{dt}$ le travail élémentaire peut encore s'écrire $dW = \vec{f} \cdot \vec{v} \cdot dt$

Finalement pour un déplacement du point M de A jusqu'à B il vient :

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot \vec{dl} \quad \text{ou} \quad W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_{t_A}^{t_B} \vec{f} \cdot \vec{v}\, dt$$ (l'unité est le Joule J=kgm^{2}s^{-2})

Remarques

- Le travail d'une force peut être positif (travail moteur) ou négatif (travail résistant cas des forces de frottement par exemple)
- Si plusieurs forces sont appliquées au point matériel, le travail total est égal au travail de la résultante de toutes les forces
- Dans le cas d'un système matériel le travail total est égal à la somme algébrique des travaux de toutes les forces appliquées (forces intérieures et extérieures).

  Si le système matériel est un solide indéformable, le travail des forces intérieures est nul et le travail total se réduit au seul travail des forces extérieures.

Nous n'envisagerons ici que le cas des solides indéformables.

Énergie potentielle

Chaque fois que le travail d'un système de force $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ...)$ appliqué à un solide ne dépend pas du chemin suivi par le solide pour aller d'un point A vers un point B, on peut définir une fonction énergie potentielle E_p. Le travail effectué par les forces $\vec{f}_i$ dans le déplacement de A vers B est alors égal à la variation d'énergie potentielle entre ces deux points (énergie potentielle finale moins énergie potentielle initiale) changée en signe :

$$\sum W_{A\to B}(\vec{f}_i) = -(E_{pB} - E_{pA})$$

Autrement dit le travail effectué pour aller de A à B est égal à l'énergie potentielle initiale moins l'énergie potentielle finale :

$$\sum W_{A\to B}(\vec{f}_i)=E_{pA}-E_{pB}$$

Exemple : force de pesanteur

On rappelle que le poids $\vec{P}$ d'un solide est défini par le produit de la masse m de ce solide par l'accélération de pesanteur $\vec{g}$ soit : $\vec{P}=m\cdot\vec{g}$ avec $|\vec{g}|=9{,}81\,m\cdot s^{-1}$ (On sait que $\vec{P}$ est appliqué au centre de gravité G du solide)

L'énergie potentielle est alors donnée par :

$$E_p=\|\vec{P}\|\cdot z+cste=m\cdot g\cdot z+cste$$

où z est l'altitude de G, l'axe $\vec{Oz}$ étant vertical ascendant et avec $g=\|\vec{g}\|$.

Dans ces conditions le travail effectué par $\vec{P}$ lors d'un déplacement d'un point A à un point B s'écrit :

$$W_{A\to B}(\vec{P})=m\cdot g\cdot(z_A-z_B)$$

Énergie cinétique

L'énergie cinétique est une énergie qui est associée au mouvement. Tout solide de masse m dont le centre d'inertie G est animé d'une vitesse v possède une énergie :

$$E_c=\frac{1}{2}m\cdot v^2 \quad \text{(Joule J=kgm}^2\text{s}^{-2}\text{)}$$

Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique totale est définie comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (quand elle existe). Elle se conserve au cours du temps pour un système n'ayant pas d'échange d'énergie autre que mécanique avec l'extérieur et plus particulièrement dans le cas d'un système supposé sans frottement.

$$E_{cA}+E_{pA}=E_{cB}+E_{pB}$$

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un repère Galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un solide entre deux instants quelconques t_1 (point A) t_2 (point B) est égale à la somme algébrique des travaux effectués par toutes les forces s'exerçant sur le solide pendant le même intervalle de temps.

Démonstration

En appelant $\vec{V}$ la vitesse du centre d'inertie et $\vec{F}$ la somme vectorielle de toutes les forces appliquées $(\vec{F}=\sum\vec{f}_i)$ il vient : $dW=\vec{F}\cdot\vec{V}\cdot dt.$

D'autre part : $\vec{F}=\frac{d(m\cdot\vec{V})}{dt}=m\frac{d\vec{V}}{dt}$. Donc $dW=m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{V}\cdot dt=m\vec{V}\cdot d\vec{V}$

Or $E_c=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m\vec{V}^2$ soit $dE_c=d(\frac{1}{2}m\vec{V}^2)=m\vec{V}\cdot d\vec{V}=mV\cdot dV$ et $dW=d(\frac{1}{2}mV^2).$

En intégrant de t_1 (point A) à t_2 (point B) on obtient :

$$W_{A\to B}(\vec{F})=\frac{1}{2}m(V_B{}^2-V_A{}^2)=E_{cB}-E_{cA}$$

Cas particulier : si l'on peut définir une énergie potentielle et s'il n'y a pas de frottement on a :

$E_{pA}-E_{pB}=E_{cB}-E_{cA}$ où l'on retrouve la conservation de l'énergie mécanique.

(s'il y a des frottements, il existe un travail résistant (négatif) des forces de frottement, pour lequel on ne peut pas définir d'énergie potentielle : il n'y a pas conservation de l'énergie mécanique).

Exercice 1

Un solide S_1 supposé ponctuel de masse m_1 = 50g, est abandonné sans vitesse initiale d'un point A et glisse sur un plan incliné d'un angle α = 30° par rapport à l'horizontale (figure 1 ci-dessous). Après un parcours AB = L = 1m, il aborde un plan horizontal sur lequel il continue de glisser avant de heurter un solide S_2 immobile supposé ponctuel, de masse m_2 = 150g.

Tous les mouvements s'effectuent sans frottement. On prendra g = 10 ms^{-2}.

1) Calculer juste avant le choc avec S_2, la vitesse v_1 du solide S_1, sa quantité de mouvement p_1 et son énergie cinétique E_{c1}.
2) Au moment du choc il y a accrochage des deux solides. Appliquer la loi de conservation de la quantité de mouvement pour en déduire la vitesse v_G du centre d'inertie de l'ensemble des deux solides juste après le choc.
3) Y a-t-il eu conservation de l'énergie cinétique ?

Exercice 2

Un skieur assimilé à un point G, de masse 80 kg, glisse sur une piste formée de deux parties AB et BC situées dans le même plan vertical (figure 2 ci-dessous). L'arc AB de centre O situé sur la verticale de B, a un rayon r = 50 m et BC est une partie horizontale de longueur l = 50m.

Le skieur part sans vitesse initiale du point A tel que $\alpha_A=(\vec{OB},\vec{OA})=60°$. On prendra g=9,8 ms^{-2}.

1°) En négligeant les frottements, calculer la vitesse du skieur en un point M quelconque de l'arc AB repéré par l'angle $\alpha=(\vec{OB},\vec{OM})$. En déduire sa vitesse au point E tel que $\alpha_E=(\vec{OB},\vec{OE})=30°$ et celle du point B.

2°) En fait sur le trajet ABC, existent des forces de frottements assimilables à une force tangente à la trajectoire et d'intensité constante F. Si le skieur arrive sans vitesse en C, quelle est la valeur F du module de cette force de frottement ?

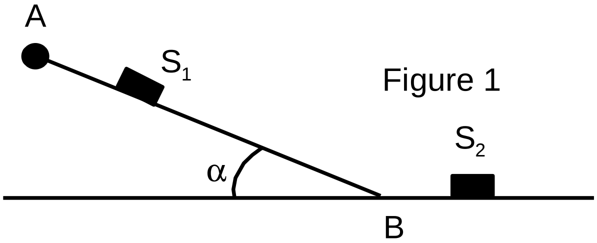


Figure 1

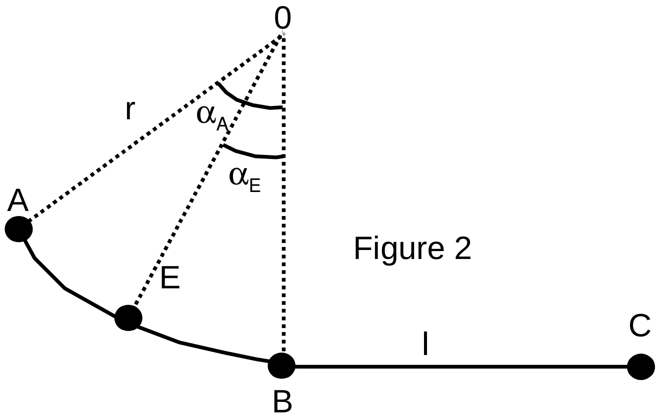


Figure 2

Cas de la rotation

Travail élémentaire d'une force en rotation

Soit un point M en rotation autour d'un axe Δ (figure ci-contre) se déplaçant d'une quantité élémentaire d W et soumis à la force F. Le travail élémentaire de cette force lors du déplacement peut naturellement s'écrire :

$$dW = \vec{F}\cdot\vec{dl} = (\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3)\cdot\vec{dl}$$

Comme le vecteur $\vec{dl}$ est tangent au déplacement, les produits $\vec{F}_1\cdot\vec{dl}$ et $\vec{F}_3\cdot\vec{dl}$ sont nuls. Il vient donc :

$$dW = \vec{F}_2\cdot\vec{dl} = \vec{F}_2\cdot\vec{OM}\cdot d\alpha = F_2\cdot OM\cdot d\alpha$$

La quantité F_2.OM est appelé moment de la force F_2 par rapport à W Dans le cas présent c'est aussi le moment de la force F/ W.

Il nous faut donc retenir :

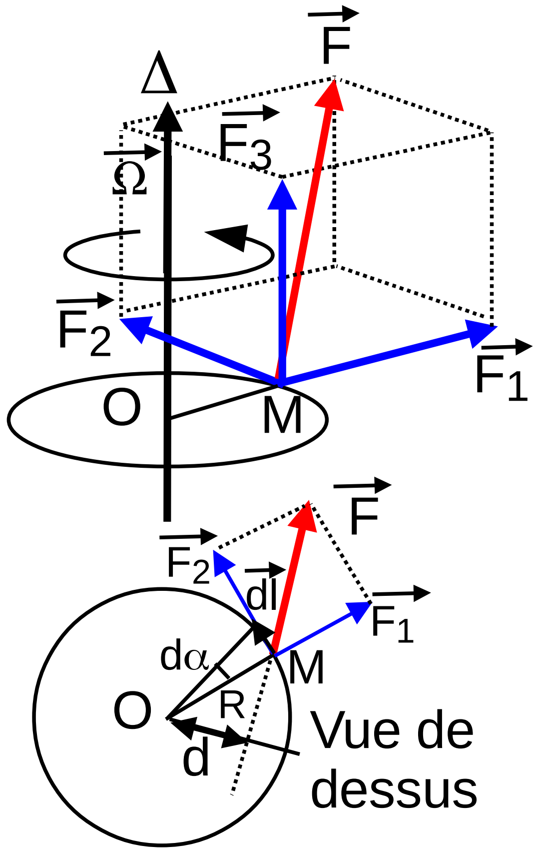
$\boxed{dW = M_{F/\Delta}\cdot d\alpha}$ (J = N.m x rad)

et si F et tangent au mouvement :

$M_{F/\Delta} = OM\cdot F$ (unité N.m)

ou si F n'est pas tangent :

$$\boxed{\overrightarrow{M_{F/\Delta}} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}}$$



Le repérage du sens du vecteur moment est donné par le sens du tire-bouchon.

Couple moteur et son moment - puissance d'un moteur

L'action d'un moteur se traduit par des forces exercées par l'arbre. Ces forces sont des forces de contact réparties à sa surface. On peut les schématiser par un ensemble de groupes de deux forces F de même intensité et de sens opposé appliquées aux deux extrémités d'un même diamètre d de l'arbre. Un tel système constitue ce que l'on appelle un couple de forces. Si l'on note C le moment de ce couple de force (C=F.d) on peut définir la puissance par P = C. W.

Exercice 3

Dans une notice automobile on lit : couple maximal (à 3000 tours/mn) 16,4 m.daN (comprendre : moment du couple maxi). Quelle est alors la puissance du moteur ?

Dans la même notice on lit : puissance maximale 96 ch à 5200 tours/minute. Quelles conclusions en tirez-vous ? (1ch = 736 W)

Energie cinétique d'un corps en rotation

Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe fixe Δ, ses diverses parties élémentaires de masses m_i décrivent des cercles de rayons r_i avec différentes vitesses linéaires v_i. Si toutes les vitesses linéaires v_i sont différentes, la vitesse angulaire de tous ces points est la même (si le corps ne se déforme pas pendant la rotation), c'est à dire que :

$\Omega = v_1/r_1 = v_2/r_2 = ...$

L'énergie cinétique du corps tournant sera

$Ec = 1/2\ m_1v_1^2 + 1/2\ m_2v_2^2 + 1/2\ m_3v_3^2 + ... + 1/2\ m_nv_n^2$

$= \Omega^2/2\ (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + .. + m_nr_n^2)$

La quantité entre parenthèse sera appelée moment d'inertie par rapport à l'axe Δ et notée I. Elle vaut donc :

$\boxed{I_{/\Delta}=\sum_{i=0}^{i=n} m_i \cdot r_i^2}$ (unité kg.m²)

Dans le cas général où les masses ne sont plus discrètement réparties mais continûment réparties,

il se calcule par la formule : $I_{/\Delta}=\iiint_V r^2 \cdot dm=\iiint_V r^2 \cdot \rho \cdot dv$

si ρ désigne la masse volumique et dv l'élément de volume.

On retiendra donc :

$\boxed{E_c=\frac{1}{2}\cdot I_{/\Delta}\cdot\omega^2}$ (Joule = kg.m² x (rad/s)²)

Cas de la translation et rotation

On se trouve dans cette situation assez souvent : dès qu'un moteur (qui tourne) est utilisé pour faire avancer quelque chose. Dans ce cas la translation peut se ramener à de la rotation en utilisant la relation entre vitesse angulaire et vitesse de translation.

On retiendra donc :

$\boxed{E_c=\frac{1}{2}\cdot I_{/\Delta}\cdot\omega^2+\frac{1}{2}\cdot M\cdot v^2}$ (Joule = kg.m² x (rad/s)²)

Les exercices d'applications seront dans le TD suivant.

TD 8 Des capteurs aux robots différentiels

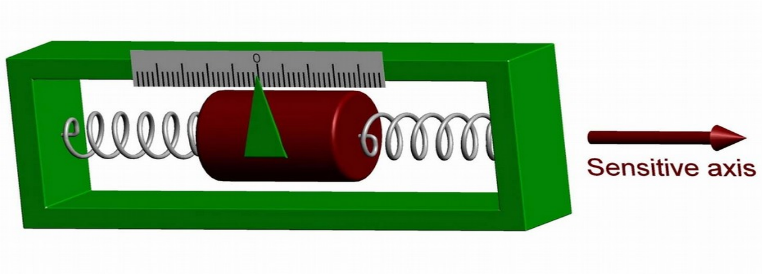
Nous allons reprendre le robot différentiel du dernier exercice du TD précédent et l'examiner du point de vue des capteurs et de manière cinématique.

Les capteurs inertiels

Les principes physiques des capteurs inertiels ne peuvent être compris qu'après la dynamique.

Les accéléromètres

En attachant une masse à un ressort et en mesurant sa déformation, on obtient un accéléromètre tout simple :



- la gravitation est aussi mesurée (principe d'équivalence d'Einstein)

- la mesure totale est appelée Force spécifique

- en utilisant trois (ou plus) accéléromètres on peut former une force spécifique 3D : f_{IB}^{B} qui signifie force spécifique du corps (Body) relativement à l'espace Inertiel dans le corps

Les gyromètres

Les gyromètres mesurent la vitesse angulaire relativement à l'espace inertiel ω_{IB}^{B}

Inertial Measurement Unit (IMU)

Trois gyromètres et trois accéléromètres sont combinés.

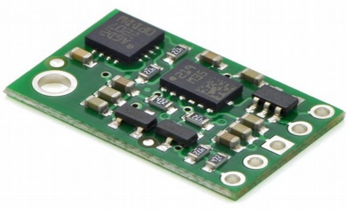
Exemple : Honneywell HG1700 ("medium quality")

- 3 accéléromètres : précisions 1mg,

- 3 gyromètres laser, précision 1 deg/heure

- fréquence de mesures des six valeurs 100 Hz.

On peut trouver maintenant des accéléromètre 9 axes (DOF =Degree of freedhom) pour 42 € (référence POL1268 chez lextronic : MinIMU-9 v2 Gyro)



Robot autonome différentiel : recherche de la cinématique directe

Un robot différentiel est un robot ayant deux roues autopropulsées indépendantes et une ou deux sphères directionnelles. Un schéma est donné un peu plus loin.

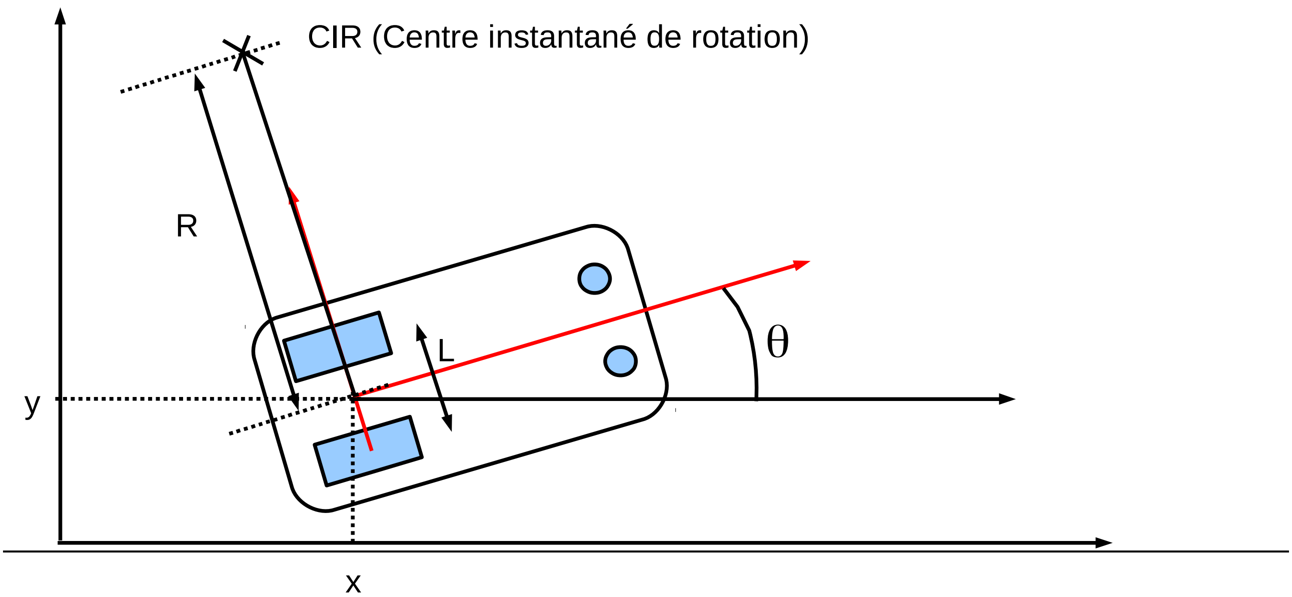
Deux repères sont à considérer, celui du laboratoire et celui du robot. On va s'intéresser à ce qui se passe dans les deux repères.

Dans le repère du laboratoire, le CIR (Centre Instantané de Rotation) est donné par :

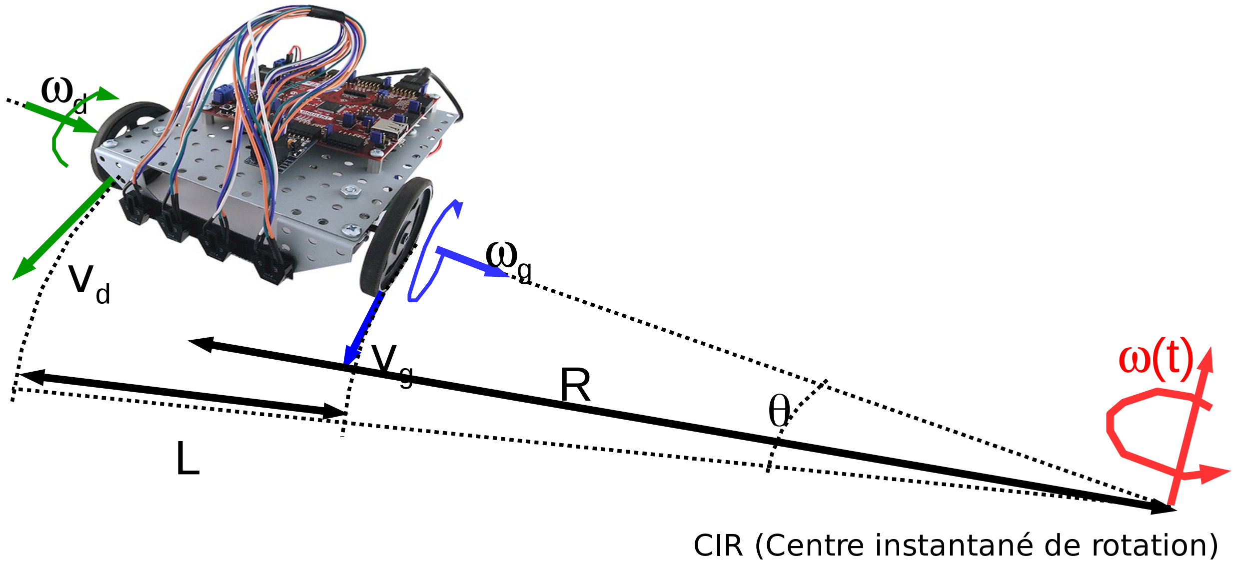
$CIR=(x-R\cdot\sin(\theta), y+R\cdot\cos(\theta))^T$ si R est le rayon de courbure de la trajectoire.

R - L/2 est le rayon de courbure de la trajectoire de la roue gauche

R + L/2 est le rayon de courbure de la trajectoire de la roue droite



Après la vue de dessus, une vue 3D (et robot Digilent) :



Dans la suite tout ce qui concerne la roue droite sera indicée d et la roue gauche indicé g.

$$\omega=\frac{v_d(t)}{R+L/2} \qquad \omega=\frac{v_g(t)}{R-L/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix}\omega(t)=\frac{v_d(t)-v_g(t)}{L} \\ R(t)=\frac{L}{2}\frac{v_g(t)+v_d(t)}{v_g(t)-v_d(t)}\end{matrix}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t)=\omega(t)\cdot R(t)=\frac{1}{2}\cdot(v_d(t)+v_g(t))}$$

Modèle cinématique dans repère du robot

Si r est le rayon commun de chacune des roues on peut noter sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r/2 & r/2 \\ 0 & 0 \\ -r/L & r/L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_g(t) \\ \omega_d(t) \end{pmatrix}$$

Modèle cinématique dans le repère du laboratoire (cinématique directe)

Il est aussi facile d'obtenir à partir du schéma :

$$\dot{x}(t)=v(t)\cdot\cos(\theta(t)) \quad \text{et donc} \quad x(t)=\int_0^t v(t)\cdot\cos(\theta(t))\,dt$$

$$\dot{y}(t)=v(t)\cdot\sin(\theta(t)) \quad \text{et donc} \quad y(t)=\int_0^t v(t)\cdot\sin(\theta(t))\,dt$$

$$\dot{\theta}(t)=\omega(t) \quad \text{et donc} \quad \theta(t)=\int_0^t \omega(t)\,dt$$

Tout ceci peut encore se condenser sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

Ces relations sont générales pour tout véhicule. Cherchons à les appliquer au cas particulier du robot différentiel :

Comme on a vu plus haut $v(t)=\omega(t)\cdot R(t)=\frac{1}{2}\cdot(v_d(t)+v_g(t))$ et $\omega(t)=\frac{v_d(t)-v_g(t)}{L}$ il vient :

$$\boxed{x(t)=\int_0^t \frac{1}{2}\cdot(v_d(t)+v_g(t))\cdot\cos(\theta(t))\,dt}$$

$$\boxed{y(t)=\int_0^t \frac{1}{2}\cdot(v_d(t)+v_g(t))\cdot\sin(\theta(t))\,dt}$$

$$\boxed{\theta(t)=\int_0^t \frac{v_d(t)-v_g(t)}{L}\,dt}$$

Ces trois équations sont les équations de la cinématique directe. Elles relient des variables connues (ou supposée maîtrisée) du robot à sa position dans un plan.

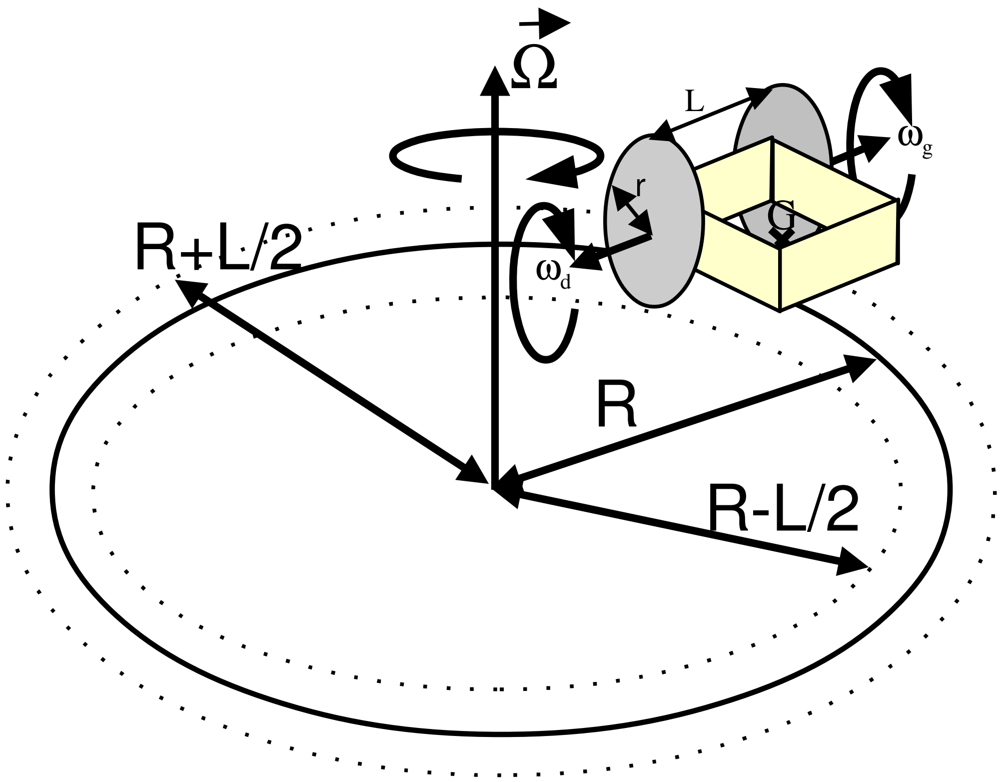
Exercice 1 (Etude d'un robot différentiel)

Pour notre robot différentiel, on suppose que deux moteurs électriques entraînent directement les roues (sans démultiplication). Les deux moteurs tournent avec des vitesses constantes mais différentes. La voie entre les deux roues est de b=20 cm et les roues ont un diamètre D=10 cm. Un moteur tourne à 2 rad/s et l'autre à 1,9 rad/s et on désire calculer le rayon intérieur R du cercle parcouru par le robot (voir figure ci-après).

1°) Calculer les distances intérieures et extérieures ΔL_{int} et ΔL_{ext} parcourues par les roues pour un même intervalle de temps Δt en fonction de R_{roue}, $\Delta t, \omega_{int}$, ω_{ext} si ω_{int} et ω_{ext} désignent respectivement les vitesses angulaires de la roue intérieure et de la roue extérieure.

2°) Refaire ce même calcul en fonction de Ω vitesse de rotation du robot sur le cercle le rayon du cercle R et la voie b pour un même intervalle de temps Δt.

3°) En déduire de la vitesse de rotation Ω et la période T correspondante ainsi que le rayon R en fonction de R_{roue}, b, ω_{int}, ω_{ext}. Applications numériques.



Exercice 2 (Robot ASURO)

1°) Écrire les équations de la cinématique directe en fonction de $\omega_d(t)$ et $\omega_g(t)$ (vitesses angulaires de rotation des roues) et de r la rayon de chacune des roues.

2°) On dispose sur notre robot d'un dispositif capable de compter des impulsions comme montré sur sur la photo jointe par une flèche.

Combien de secteurs noirs a-t-on par tour ? de secteurs blancs ?

Les calculs suivants seront fait avec 4 et 4 comme valeurs (valeurs pour mon ASURO personnel)

Les petits pignons comportent 10 dents tandis que les gros en comportent 50. Quelle est la relation entre la vitesse angulaire mesurée et la vitesse angulaire des roues ? Sachant que les roues ont un diamètre de 37mm, quelle est la relation entre la vitesse angulaire mesurée et la vitesse linéaire ?

3°) On appelle T_d et T_g le nombre de ticks enregistrés sur la roue droite et gauche, T_R le nombre de ticks enregistrés sur un tour complet de roue, r le rayon de chacune des roues, et a l'écartement des voies. On suppose que la position du robot à un instant t_0 est caractérisée par $(x, y, \theta)^T$. On va s'intéresser à ce qui se passe pendant un intervalle de temps Δt :

- le nombre de ticks seront ΔT_g et ΔT_d pour respectivement les roues gauche et droite
- la variation des coordonnées et d'orientation seront $(\Delta x, \Delta y, \Delta \theta)$

Montrer les relations $(\Delta x, \Delta y, \Delta \theta)$ en fonction des paramètres ci-dessus :

$$\Delta \theta = 2\pi \frac{r}{a} \frac{\Delta T_d - \Delta T_g}{T_R}$$

$$\Delta x = \frac{\pi}{T_R} r \cos(\theta)(\Delta T_d + \Delta T_g)$$

$$\Delta y = \frac{\pi}{T_R} r \sin(\theta)(\Delta T_d + \Delta T_g)$$

Mise en œuvre en C

Les relations trouvées dans l'exercice 2 sont à sommer même si en principe il faut intégrer. En faisant l'approximation des petits angles (le calcul doit donc toujours s'effectuer sur des micro-déplacements) le calcul d'intégration est relativement simple.

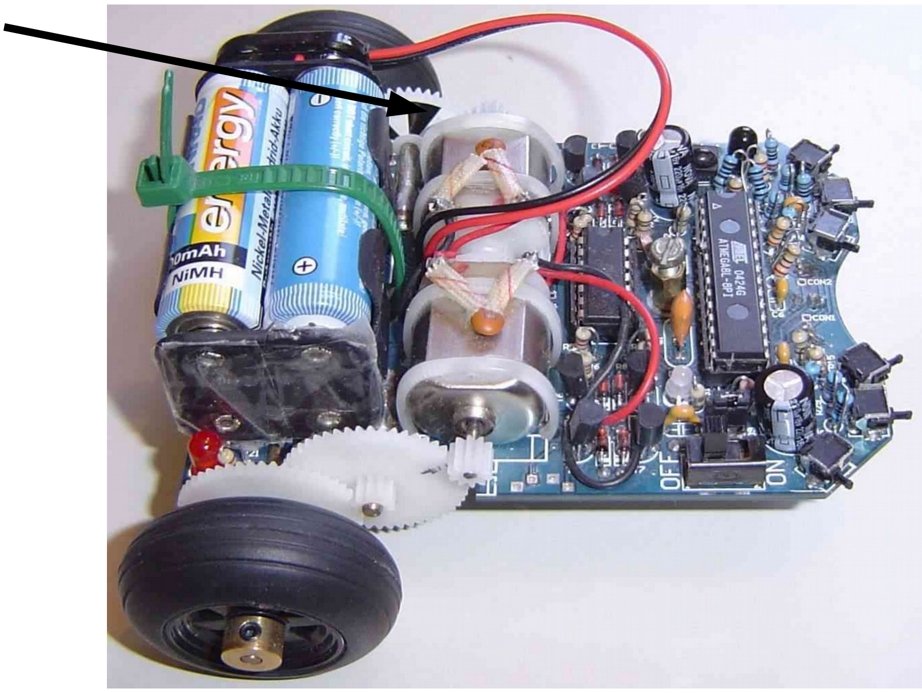
On peut déterminer les variations de l'angle et de la position du robot comme ceci :

```
dAlpha = (dRight-dLeft); //variation de l'angle
dDelta = (dRight+dLeft)/2; //variation de l'avancement

//conversion en radian
alpha += dAlpha / entraxeEnTick;

//calcul des décalages selon X et Y
dX = cosf(alpha) * dDelta;
dY = sinf(alpha) * dDelta;

//conversion de la position en mètre
X += dX / tickParMetre;
Y += dY / tickParMetre;
```

Une optimisation simple consiste à ne pas recalculer le cosinus et le sinus à chaque coup car il s'agit d'une opération très lourde pour un microcontrôleur. On ne recalcule donc le vrai cosinus et sinus qu'une fois sur cent par exemple, le reste du temps on calcule le nouveau sinus par une approximation tiré d'une décomposition de Taylor au second ordre :

cos(x) = cos(a)-sin(a)*(x-a)+O(x-a)^2 (pour x~=a)
et sin(x) = sin(a)-cos(a)*(x-a)+O(x-a)^2 (pour x~=a)

Une autre méthode consiste à utiliser un format virgule fixe avec l'algorithme CORDIC pour les calculs des sinus et cosinus . Par exemple le format Q3.13 permet le calcul du sinus et cosinus en 14 itérations sans multiplication (avec seulement des décalages, des additions et soustractions sur 16 bits).



Les méthodes de navigations à partir des données de capteurs internes s'appellent "dead reckoning" en anglais que l'on traduit par navigation à l'estime.

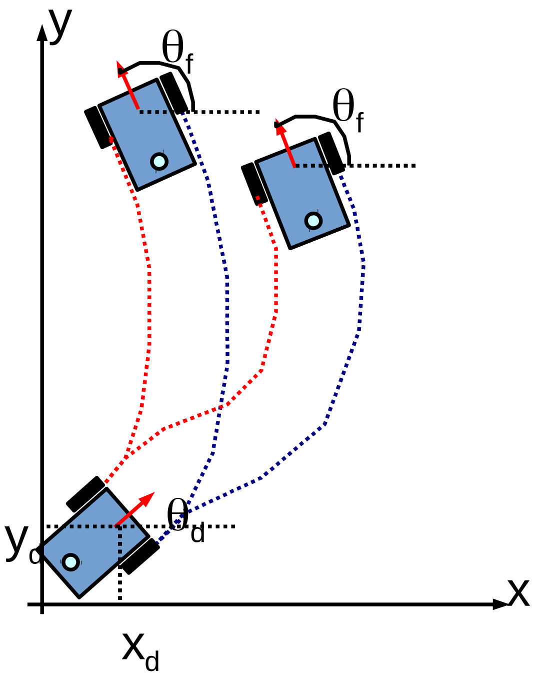
Pourquoi la navigation à l'estime est-elle difficile ?

Avant de se poser des questions il faut essayer de bien comprendre ce que veut dire connaître exactement l'état du robot. Celui-ci est donné par trois paramètres même si l'on est en deux dimensions : (x, y, θ) . x et y sont naturellement le repérage de la position sur les deux axes x et y et θ est l'orientation du robot par rapport à l'axe des x. Regardez la figure ci-après pour vous convaincre de la pertinence de ces trois données.

Distances rouges identiques, distances bleues identiques mais point final différent

Imaginons que vous ayez fait déplacer votre robot pendant un temps T quelconque. Vous relevez les compteurs de chacune des roues et convertissez en centimètres parcourus et trouvez deux nombres A et B. Est-il possible d'en déduire la nouvelle position (et orientation) sachant que l'on connaît exactement la position de départ ? Autre manière de poser le problème : je connais parfaitement (x_d, y_d, θ_d) ainsi que la distance parcourue par chacune des roues est-il possible d'en déduire (x_f, y_f, θ_f) ? Malheureusement la réponse à cette question est partiellement négative ! Il n'est possible que d'avoir θ_f mais pas le reste.

Tout cela est résumé simplement par la figure ci-dessous. Dans cette figure, les deux longueurs



(en pointillés) rouges sont identiques (et égales à A) et les deux longueurs (en pointillés) bleues sont elles aussi identiques (et égales à B) et pourtant on obtient deux points d'arrivées différents. Seule l'orientation finale est identique. Cela montre qu'aucune formule ne permet le calcul de xf à partir de xd, A et B.

Doit-on abandonner l'idée de trouver le point final à partir du point de départ ? Non, heureusement. En fait le problème présenté devient possible si les deux distances parcourues A et B deviennent différentielles (c'est à dire toutes petites). C'est quand même une mauvaise nouvelle malgré tout. Cela veut dire qu'il nous faut mémoriser les distances parcourues par chacune des roues à des instants précis et assez fréquemment pour se rapprocher de l'idée mathématique de différentielle.

Cinématique inverse

Les équations de la cinématique directe sont bien gentilles mais elles permettent seulement de calculer la position à partir de données propres au robot. Ce que l'on désire dans la majorité des cas c'est résoudre le problème inverse : mon robot est en (x_0,y_0) et je veux qu'il aille en (x_1,y_1) quelle est alors commande en vitesse $v_g(t),v_d(t)$ dois-je faire ? Résoudre ce problème dans le cas général est très complexe et donne plusieurs solutions que nous n'allons pas examiner ici.